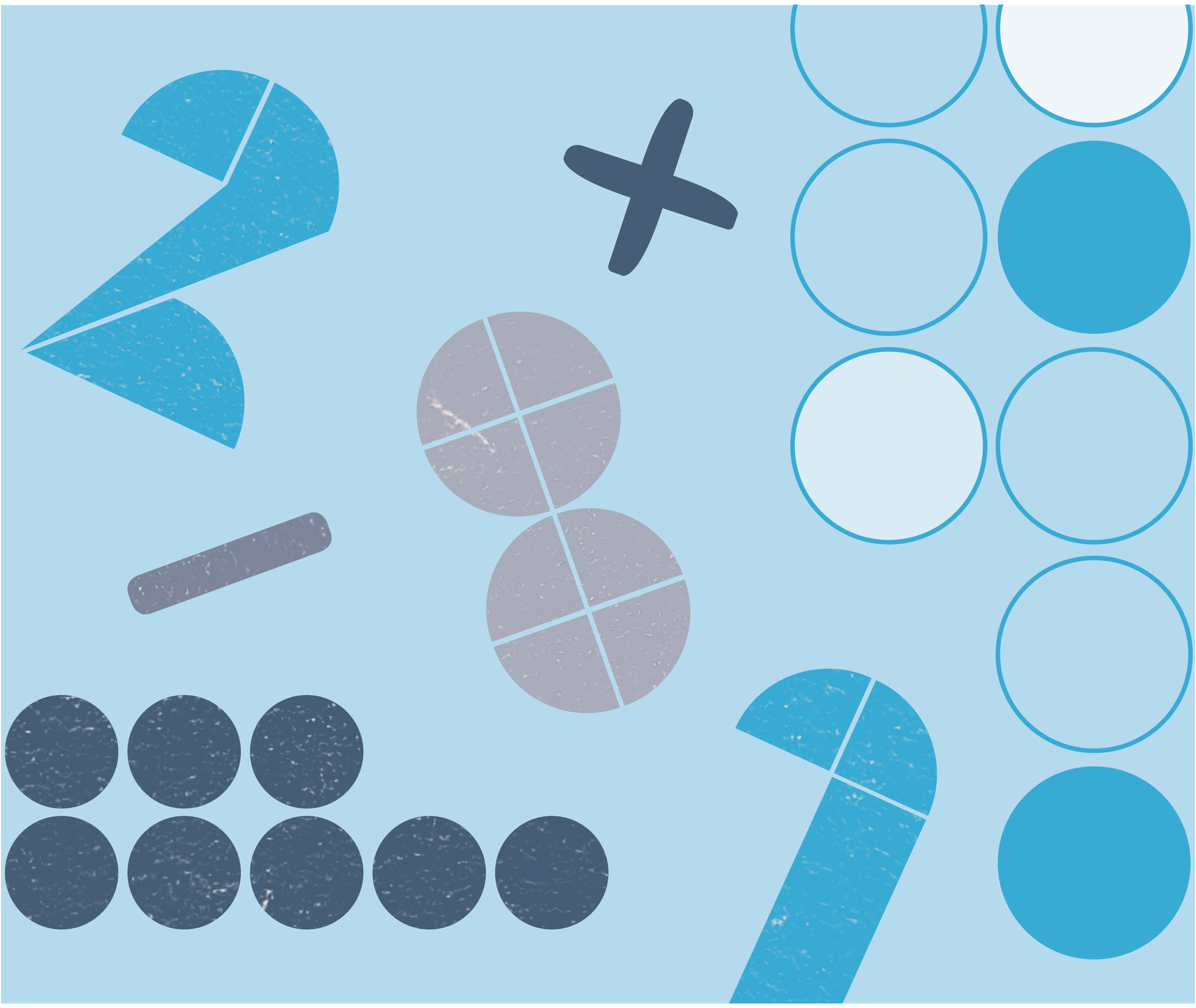
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die schulische Behandlung der Rechenschwäche

Eine Handreichung



Die schulische Behandlung der Rechenschwäche

Eine Handreichung

Wien, 2018

Impressum

Die schulische Behandlung der Rechenschwäche.
Eine Handreichung.
Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung,
Abteilung Schulpsychologie-Bildungsberatung, Wien 2017.
Wir danken der Arbeitsgruppe der Schulpsychologie Österreich in Kooperation mit der KPH Graz und der Psychologie der Universität Graz für die fachliche Aufbereitung.
Herausgeber: Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung,
Minoritenplatz 5, 1010 Wien.
E-Mail: schulpsychologie@bmbwf.gv.at
Dritte, inhaltlich überarbeiteteAuflage

Alle Broschüren der Schulpsychologie – Bildungsberatung stehen als Download unter www.schulpsychologie.at zur Verfügung.
Grafische Gestaltung: BKA Design & Grafik
Foto(s): BKA/Andy Wenzel
Druck: Digitales Druckzentrum Renngasse

Erstellt von der Arbeitsgruppe »Dyskalkulie« (Rechenschwäche) der Schulpsychologie-Bildungsberatung in Kooperation mit der Kirchlichen Pädagogischen Hochschule der Diözese Graz-Seckau sowie der Entwicklungspsychologie der Universität Graz.
Mag.ª Birgit Dünser, Schulpsychologische Beratungsstelle Dornbirn
Mag.ª Paule Dusseldorf, Schulpsychologische Beratungsstelle Imst
Dr. Albert Ellensohn, Schulpsychologische Beratungsstelle Hallein
Haider Rosina MA, KPH Graz
Dr.in Beatrix Haller, BMB, Abt. I/9
Dr. Gerald Horn, Schulpsychologische Beratungsstelle Liezen
Univ.-Prof.in Dr.in Karin Landerl, Universität Graz
Mag.ª Angelika Lang, Schulpsychologische Beratungsstelle Amstetten
MMag.ª Claudia Neuner-Heiss, Schulpsychologische Beratungsstelle Wien, Ref. 1 (für APS)
Mag. Robert Petz, Schulpsychologische Beratungsstelle Zell am See
Mag.ª Amina Raschid, Schulpsychologische Beratungsstelle Feldkirch
Dr. Hubert Schaupp, KPH Graz

Koordination und für den Inhalt verantwortlich:
Dr. Hubert Schaupp, KPH Graz
Univ.-Prof.in Dr.in Karin Landerl, Universität Graz
Dr.in Beatrix Haller, Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, Abteilung Schulpsychologie
Diese Broschüre ist auch im Internet unter www.schulpsychologie.at verfügbar.

Inhalt

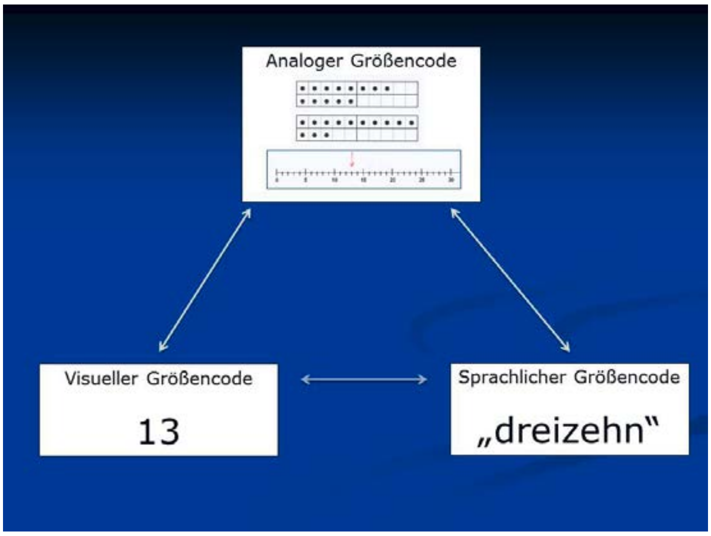
Die Entwicklung des kindlichen Rechnens

ALBERT ELLENSOHN UND KARIN LANDERL

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Entwicklung jener Prozesse darzustellen, die die Grundlage für flexibles Rechnen[1] darstellen. Diese idealtypische Entwicklungsdarstellung findet zwar bei keinem Kind so statt, sie kann jedoch als eine Art »Kontrastmittel« dienen, um besser fassen zu können, welche Probleme rechenschwache Kinder haben und welche inneren Modelle diese Kinder nicht ausreichend entwickeln können.

Drei Zahlencodes

(An)zahlen begegnen uns im Alltag in unterschiedlichen Formaten: Wenn auf dem Kuchenteller noch drei Stück Kuchen übrig sind, so nehmen wir die Mächtigkeit der Menge von Kuchenstücken (= drei) als »analoge Größenrepräsentation« wahr. Zahlen können auch als Zahlwörter verbal benannt werden (»drei«) oder als Arabische Ziffern und Zahlen (3) niedergeschrieben werden. Zahlwörter und arabische Zahlen fungieren als symbolische Darstellungsformen für analoge »Numerositäten« in unserer Umwelt. Bei kompetenten Erwachsenen sind diese drei Zahlencodes (analog, verbal und visuell-arabisch) neurofunktional so eng miteinander vernetzt, dass sie stets gemeinsam automatisch aktiviert werden (Triple-Code Modell, Dehaene, 2012). Wir können die Ziffer 5 gar nicht wahrnehmen, ohne uns gleichzeitig der numerischen Bedeutung dieser Ziffer (also der analogen Größenrepräsentation der »Fünfheit«) bewusst zu sein. Diese hochautomatischen Aktivierungsprozesse sind bei Kindern noch nicht vorhanden, das neurofunktionale Netzwerk der Zahlenverarbeitung entwickelt sich erst im Lauf der Kindheit und basiert auf vielfacher Erfahrung mit den unterschiedlichen Zahlencodes.



Triple-Code Modell (Dehaene, 2012)

1 »Flexibel« Rechnen und »denkendes« Rechnen sind Synonyme für gut entwickelte arithmetische Fähigkeiten der Grundschulzeit.

Ein Kernmechanismus der analogen Größenrepräsentation ist uns offenbar angeboren: Kinder sind von Geburt an aufmerksam für die Anzahl von Objekten in der Welt und verfügen auch über ein naives Grundverständnis für Addieren (= etwas hinzufügen) und Subtrahieren (= etwas wegnehmen). Selbst einfache »falsche Rechenprozesse« werden bemerkt: wenn zu einer Mickymaus-Figur durch einen Schirm verdeckt eine zweite Figur hinzugestellt wird, aber nach Entfernung des Abdeckschirms nur eine Figur sichtbar wird, dann sind bereits sechs Monate alte Babys irritiert (Wynn, 1992).

Im Zuge des Spracherwerbs werden auch die ersten Zahlwörter erlernt. Diese werden anfangs meist ohne klaren Bezug zu den »analogen Mengenrepräsentationen« benannt oder als Zahlwortsequenz (»eins, zwei, drei«…) aufgesagt, ähnlich wie Kinderreime. Um Zählprozesse korrekt durchführen zu können, müssen Kinder eine Reihe von grundlegenden Zählprinzipien (Gelman & Gallistel, 1978) verstehen:

1. Prinzip der Eins-zu-eins Zuordnung: Jedem zu zählenden Objekt muss genau ein Zahlwort zugeordnet werden. Typische Fehler sind, dass ein Objekt doppelt oder gar nicht gezählt wird.
2. Prinzip der stabilen Abfolge: Die Zahlwörter werden in einer konsistenten Abfolge verwendet. Zählfehler treten auf, wenn Kinder die Zahlwortreihe noch durcheinander bringen (»eins, zwei, drei, vier, sieben…«)[2].
3. Kardinalitätsprinzip: Das letzte Wort des Zählprozesses repräsentiert die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der gezählten Menge. Manchmal ist es schwierig zu erkennen, ob Kinder dieses Prinzip bereits verstehen, auch wenn der Zählprozess an sich korrekt durchgeführt werden kann. Ist die Aufgabe, aus einer größeren Menge 5 Murmeln abzuzählen und fragt man dann: »Wo siehst Du hier die 5 Murmeln?« so zeigen Kinder, die das Kardinalitätsprinzip noch nicht erfasst haben, oft auf die 5. Murmel (anstatt auf die Gesamtmenge der Murmeln).

Ein besonderer Zählprozess wird für kleine Anzahlen (bis vier Objekte) bereits von Kleinkindern verwendet: Ohne seriell-verbales eins-zu-eins-Abzählen kann die Anzahl auf einen Blick erfasst werden, daher benötigt das Zählen kaum länger, wenn vier als wenn ein oder zwei Objekte gezählt werden. (Ab etwa fünf Objekten nimmt die Zeit, die für einen Zählprozess benötigt wird, stetig mit steigender Anzahl zu, weil ab dieser Anzahl entweder wirklich gezählt oder die Anzahl aus kleineren Teilmengen zusammengefasst werden muss). Dieser eher visuelle Zählprozess kleiner Anzahlen wird als Subitizing (lat. subito – sofort, geschwind) bezeichnet. Auch rechenschwache Kinder können diesen Prozess des Subitizings anwenden, aber er ist oft auf einen kleineren Zahlenraum (zwei oder drei Objekte) beschränkt und bei exakter Messung der Reaktionszeiten kann man feststellen, dass der Prozess weniger effizient und damit geringfügig (um wenige Zehntelsekunden), aber signifikant langsamer abläuft (Schleifer & Landerl, 2011).

Auch einfache Rechenprozesse werden im Kindergartenalter bereits durchgeführt, wobei hier zumeist die Finger zum Nachzählen zu Hilfe genommen werden (Fingerrechnen). Dem Fingerrechnen kommt beim Aufbau der neurokognitiven Repräsentation von Zahlen eine wichtige Rolle zu (von Aster, Kaufmann, & Lipka, 2015): Im Gehirn sind Finger und Zahlen vermutlich nicht zufällig in benachbarten Arealen repräsentiert. Kinder mit Fingeragnosie (einer neurofunktionalen Störung, bei der Kinder nicht zuordnen können, an welchem Finger sie berührt werden, wenn sie ihre Hände nicht sehen können) haben häufig Probleme im Aufbau

2 Zur Kenntnis der korrekten Zahlwortabfolge gehört später auch, dass Kinder die Zehner-Zahlwörter kennen und wissen, dass nach »neunund…« jeweils der nächste Zehner zu benennen ist (typischer Fehler: »neunundzwanzig, zehnundzwanzig, elfundzwanzig…«)

des Zahlenwissens und der Rechenleistung (Reeve & Humberstone, 2011). Fingerrechnen stellt also eine wichtige Grundlage für die Entwicklung differenzierterer Rechenleistungen dar und sollte im schulischen Mathematikunterricht keinesfalls zu früh unterbunden werden. Wenn Kinder Rechnungen auch ohne Zuhilfenahme der Finger lösen können, geben sie diese umständliche Strategie ganz von selbst zugunsten effizienterer Strategien auf (siehe auch Abschnitt zählendes Rechnen).

Auch arabische Ziffern sind Schulanfängern zum Teil bereits bekannt. Die Komplexitäten des Stellenwertsystems mehrstelliger Zahlen und das schriftliche Rechnen werden üblicherweise im Kontext des schulischen Mathematikunterrichts erworben. Das Stellenwertsystem ist eine Besonderheit des arabischen Zahlsystems, die zu seiner weltweiten Verbreitung führte: Mit nur zehn unterschiedlichen Ziffern (0 bis 9) können unendlich viele Zahlen dargestellt werden. Der Erwerb des Stellenwertsystems birgt allerdings eine ganze Reihe von Stolpersteinen:

(1) Ein- und dieselbe Ziffer hat in unterschiedlichen Positionen stark unterschiedliche numerische Bedeutung (z. B. 5, 52, 576, 5814, usw.).

(2) Die Ziffer »0« bedeutet nicht »nichts«, vielmehr kommt ihr eine spezielle Funktion als Platzhalter zu: 502 hat eine völlig andere Bedeutung als 52. Es dürfen aber nicht alle Nullen von Zahlwörtern angeschrieben werden: die Zahl »dreitausendfünfhundertzehn« ist nicht anzuschreiben als 300050010, sondern als 3510, wobei der Platzhalter 0 der Tausender- und Hunderter-Zahl überschrieben werden muss. Auch die Zahl »achthundert« ist nicht als 8100 dazustellen, obwohl doch 8 für »acht« und 100 für »hundert« steht.

(3) Zweistellige Zahlen stellen aufgrund der Zehner-Einer Inversion eine besondere Herausforderung dar: Während im Arabischen Zahlensystem erst der Zehner und dann der Einer angeschrieben wird, wird im deutschen Zahlwortsystem erst der Einer genannt und dann erst der Zehner (21 – »einundzwanzig«). Diese Inversion gilt ausschließlich für die Zehnerposition, bei der Hunderter- und Tausenderposition gibt es wiederum keine Inversion. In anderen Sprachen (z. B. Englisch) werden die Zehner meist vor den Einern benannt (»twenty-one«) – tatsächlich passieren in diesen Sprachen auch die bei uns so häufigen »Zahlenverdreher« deutlich seltener.

(4) Die ersten Zahlen der zweiten Dekade sind im deutschen Zahlwortsystem besonders intransparent: Aus den Zahlwörtern »elf« und »zwölf« geht nicht hervor, dass hier eine neue Dekade beginnt und 10 + 1 bzw. 10 + 2 gemeint ist. Erst bei »dreizehn« wird aus der Wortform deutlich, dass hier eine »Zehn« enthalten ist.

Aktuelle Befunde zeigen, dass ein kompetenter Umgang mit den symbolischen Zahlensystemen (bes. Stellenwertsystem) einen wichtigen Prädiktor für die spätere Rechenleistungen darstellt (z. B. Göbel, Watson, Lervåg, & Hulme, 2014). Kinder mit Rechenschwierigkeiten zeigen noch in der 2. Schulstufe massive Schwierigkeiten im Umgang mit zweistelligen Zahlen (Landerl, 2013). Zu einem Zeitpunkt, zu dem laut Lehrplan bereits das Ein-mal-eins intensiv geübt wird, fehlt diesen Kindern häufig noch das grundlegende Verständnis für das Stellenwertsystem. Wie dieses Verständnis erarbeitet werden kann, wird weiter unten dargestellt.

Zählen und Mengenstrukturierung

Für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten im Grundschulalter sind die Prozesse des *Zählens* und der *Mengenstrukturierung* grundlegend. Beide folgen eigenen Entwicklungslinien und entwickeln sich immer wieder von einer konkreten Tätigkeit ausgehend über die sprachliche Reflexion und den kommunikativen Austausch weiter (vgl. Fthenakis, 2014).

Beispiel:
Kinder, die häufig zählen, fragen sich am Ende der ihnen bekannten Reihe, wie es da weitergeht. Über die Erfahrung, dass dann eine größere Zahl folgt, kann die Frage entstehen, ob das immer so weitergeht. Dadurch, dass es immer eine noch größere Zahl gibt, egal wie lange man zählt, wird das Konzept des Unendlichen erfahrbar.

Die Entwicklungslinie des Zählens basiert auf dem ordinalen Zahlenaspekt (die Zahlen als Reihenfolge), die der Mengenstrukturierung auf dem kardinalen Zahlenaspekt (die Zahlen als Anzahlen, die räumlich strukturiert werden können). Diese Entwicklungen verlaufen niemals streng vorwärts, sondern durchaus in Fort- und Rückschritten sprunghaft und spiralförmig, sodass sich die Lernenden immer wieder auf anderem Niveau an ähnlicher Stelle wieder finden.

Beispiel:
Das Prinzip des Zerlegens der Zahlen im Zahlenraum 10 (7 besteht aus 5 und 2) wird bei der Strukturierung des Zahlenraums 100 auf höherem Niveau wieder verwendet (21 besteht aus zwei Zehnern und einem Einer), oder auch in der Struktur der Multiplikation (56 besteht aus 7 Achtern).

Die beiden Entwicklungslinien können zwar einzeln gezeichnet werden, durchdringen sich gegenseitig aber von Anfang an und der *flexible Wechsel* zwischen den Aspekten macht erst die Erweiterung der Zahlenräume und auch eine größere Abstraktion und Tiefe der Erkenntnis möglich.

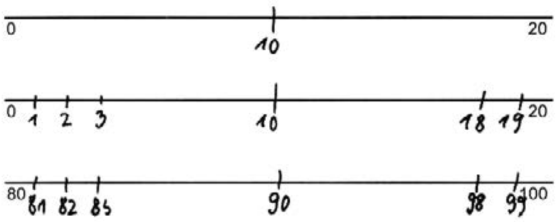
Beispiel:
Ein Kind, das eine ungeordnete Menge von 8 Elementen zählt, wechselt vom ordinalen (Zählvorgang) in den kardinalen Modus (Anzahl der Menge), wenn es bei der Nennung des Ergebnisses erfasst, dass die Zahl 8 die Mächtigkeit der Menge benennt.

Parallel zur wahrscheinlich ersten systematischen Beschäftigung mit dem Rechnen ab dem Schulanfang werden von den Kindern mannigfache alltagsmathematische Erfahrungen gemacht: Eine Tafel Schokolade gerecht auf zwei Personen aufzuteilen, auf den Geburtstag eine Woche zu warten, beim Tischdecken gleich viele Messer und Gabeln aufzulegen, mit anderen Kindern zu vergleichen, wer mehr Muscheln gesammelt hat, Taschengeld zu verwalten, in der Küche beim Abwiegen und -messen der Zutaten zu helfen, die eigene Körpergröße zu messen, »Mensch ärgere Dich nicht«, Tierquartett, Lotto oder Mühle zu spielen, (Lego) zu bauen mit und ohne Bauplan, Puzzles zu legen, etc.. Je nachdem, wie intensiv solche Erfahrungen ermöglicht werden und wie über diese Erfahrungen gesprochen wird, verstehen Kinder die Bedeutung von Zahlen und Operationen in der Umwelt. Deshalb ist die systematische spielerische Beschäftigung zur Förderung der mathematischen Vorläuferfähigkeiten im Kindergarten sehr empfehlenswert.

Zählendes Rechnen

Mit entsprechender Übung werden die Zählleistungen eines Kindes flexibler. So kann etwa die Zahlenreihe von verschiedenen beliebigen Ausgangspunkten fortgesetzt werden und die Zahlenreihe auch rückwärts aufgesagt werden. Über das häufige Abzählen von Mengen wird resultatives Zählen erworben. Die Zahlenreihe, die aufgesagt wird, verknüpft sich hier mit der Anzahl einer Menge, die am letzten gesprochenen Wort dieser Reihe abgelesen wird. Das Kind, das auf die Aufforderung 7 Finger zu zeigen, zuerst die eine Hand ganz zeigt und dann mit »6 und 7« 2 Finger der anderen Hand, macht diese Verknüpfung auch.[3] Die innere Vorstellung beim Zählen besteht zunächst aus einer Abfolge von Wörtern (»nach 39 kommt 40«), deren stabile Abfolge dann als lineare Ausbreitung – als *mentaler Zahlenstrahl* – repräsentiert wird. Das Aufsagen der Zahlenreihe bedeutet noch nicht, dass den Kindern bewusst ist, dass die Reihe immer um 1 steigt. Vielmehr zeigen zahlreiche Studien (Überblick bei Landerl & Kaufmann, 2013), dass die Zahlen am mentalen Zahlenstrahl logarithmisch komprimiert sind, was bedeutet, dass die Abstände zwischen den Zahlen als größer empfunden werden, je kleiner diese Zahlen sind. So erscheint der Abstand zwischen 3 und 8 größer zu sein als der Abstand zwischen 203 und 208).

Die Positionen der einzelnen Zahlen und deren Verhältnis zueinander differenzieren diesen Zahlenstrahl immer mehr und machen ihn als lineares inneres Modell abstrakt anwendbar.

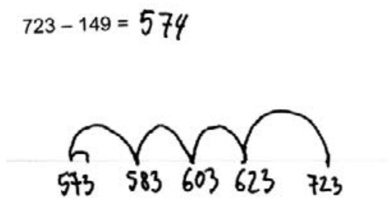


Ausdifferenzierung des Zahlenraumes - Strukturgleichheit

Logische Folgen in der Zahlenreihe (z. B.: 1-3-4-6-7-9-10 …) und Zählen in Schritten größer als 1 (2er, 5er und 10er Schritte) stärken die Orientierung und machen Abkürzungen möglich. Auf dem mentalen Zahlenstrahl sind sie als Sprünge vorstellbar. (Das ist schon ein wichtiger Vorgriff auf die Multiplikation.) Kopfrechnungen können am Zahlenstrich verdeutlicht werden. So wird kommunizierbar, was sich im Zahlenraum beim Rechnen ereignet, was sich wiederum verstärkend auf die Fertigkeiten im Kopfrechnen auswirkt.

3 Wittmann spricht in diesem Zusammenhang vom »rechenden Zählen«, das Strukturen – wie eben hier die ganze Hand des Kindes – nützt, um sich das Zählen zu erleichtern und in weiterer Folge zu ersparen. Er sieht die Bewusstmachung dieser Vorgänge als wichtigsten Schritt zu nicht zählenden Rechenstrategien.

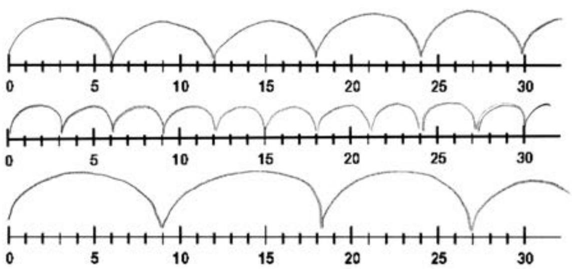
Innere Vorstellung konkreter Rechenschritte auf Papier verdeutlicht «minus 100, minus 20, minus 20, minus 10 plus 1« als eine Variante, wie das gerechnet wird.



Mit Zählen kann man auch Rechnungen lösen, wenn man die Zahlenreihe vorwärts (+) oder rückwärts (-) abschreitet. Kinder im Kindergartenalter machen das ganz selbstverständlich, wenn sie ein Rechenproblem im Alltag lösen wollen. Wenn es jedoch über die erste Klasse hinaus dauerhaft beim *zählenden Rechnen* bleibt, Schulkinder also Ergebnisse *nur* zählend ermitteln können, wird der ordinale offenbar nicht zum kardinalen Zahlenaspekt erweitert[4]. Zusammenhänge und Strukturen können ordinal nicht gebildet werden und Zählvorgänge jenseits des Zahlenraums 10 werden langwierig und fehleranfällig. Rechenstrategien, wie z. B. das sehr oft in Schulen gelehrte und geübte »Weiterzählen«, führen bei Kindern, die nicht »von selbst« die Verflechtung mit den kardinalen Aspekten herstellen können, zu »verfestigtem zählenden Rechnen«, einem Hauptsymptom bei Rechenschwäche.

Der innere Zahlenstrahl spielt auch in der dynamischen Auffassung der Multiplikation (als Wiederholung gleich großer Sprünge) eine Rolle. Zusammenhänge zwischen einzelnen Malreihen strukturieren den Zahlenraum weiter.

Zusammenhang zwischen 6er, 3er und 9er Ergebnissen



Mengenstrukturierung

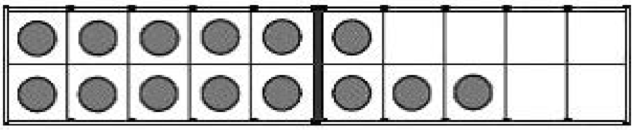
Über das »rechnende Zählen« (Wittmann, 2011) gelingt es zu verstehen, dass Anzahlen wiederum aus Anzahlen flexibel zusammengesetzt sind. Dabei ist es nicht das Ziel, dass sich Kinder merken, dass »8 aus 5 und 3 besteht«, sondern, dass sie verstehen, dass 8 nur in Beziehung zu anderen Zahlen einen eindeutigen Sinn hat: »es besteht sowohl aus 5 und 3, als auch aus 6 und 2, 7 und 1, 8 und 0 etc.«. Die Einsicht in dieses Teil-Teil-Ganzes-Konzept ist ein »Meilenstein« in der Entwicklung mathematischer Kompetenzen (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2014). Dieses Konzept besteht im Prinzip darin, dass größere Zahlen in kleinere zerlegt und kleinere zu größeren zusammengesetzt werden können. Eine lineare Anordnung von Elementen, (z. B.: ●●●●●●●● für 8) ist wenig hilfreich, um die Teil-Ganzes

4 Rechenschwache Kinder sind nicht zählende Rechner, weil sie besonders gut zählen können, sondern, weil sie nichts anderes können als zählen.

Relationen der Menge zu erfassen. Andere Anordnungen, z. B. oder erleichtern das Erfassen der Teilemengen von 8.

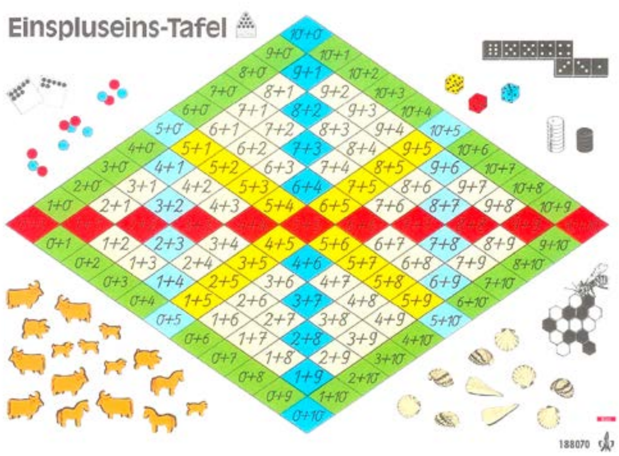
Für erste strukturierende Mengenerfahrungen können z. B. Spielwürfel gut genützt werden, die zunächst als ganze Bilder gemerkt, dann aber auch in ihre Untermengen zerlegt werden können. Dieser Prozess kann angeregt werden, indem man Kinder fragt, woher sie wissen, was ein bestimmtes Würfelbild bedeutet. (»Das sind 6, weil doch in jeder Reihe 3 sind!«) Auch die Unterschiede zwischen den Zahlen können hier optisch erkannt und benannt werden. (»Bei 5 ist noch ein Punkt in der Mitte zum Vierer dazu«.)

Im schulischen Kontext spielt von Anfang an die Verwendung geeigneter Erarbeitungsmittel eine entscheidende Rolle, wenn es um die Erarbeitung und Erweiterung des Zahlenraumes geht. Besonders hilfreich sind Materialien, die das dekadische Grundprinzip unseres Zahlensystems betonen: die Finger, das Zwanzigerfeld, der Abakus etc. Zum geeigneten Material muss aber auch der richtige Umgang mit den Erarbeitungsmaterialien dazukommen, denn jedes Material kann zum reinen Abzählen der Elemente benützt werden, was zwar zuverlässig zu richtigen Ergebnissen führt, den Aufbau von strukturierten Modellen aber verhindert. Indem Kinder gefordert werden, über die Strukturen nachzudenken, diese zu kommunizieren und selbst kreativ ähnliche Strukturen zu erfinden, entsteht konzeptuelles statt bloß prozedurales Wissen.



«Wie heißt diese Zahl? Woraus besteht diese Zahl? Welche Rechnungen kann man hier sehen?«

Zahlen werden in Beziehungen und nicht nur als Ergebnis von Zählprozeduren gedacht, wodurch die Rechenoperationen in ähnliche, zusammenhängende Gruppen geordnet werden können: die Zahlennachbarn (+1), die Verdoppelungen, die »(Hand-)Zerlegungen« zu 5 oder zu 10, die »Partnerzahlen«, die zusammen 10 ergeben, schließlich der strukturelle Zusammenhang zwischen Addition, Subtraktion und Ergänzung (vgl. Zeidl-Steiner, 2012). Diese Gruppierungen analoger Darstellungen bringen Ordnung in den Zahlenraum 20. Strukturierte Anschauungsmaterialen helfen Kindern, diese Strukturen mit der Zeit zu automatisieren. Von diesen ersten Automatisierungen können Nachbaraufgaben abgeleitet werden. Für die Herstellung von dauerhaften Automatisierungen im kleinen 1+1 sind Ableitungsstrategien von entscheidender Bedeutung (vgl. Gaidoschik, 2010).



Die Struktur des Zahlenraums 20 mit allen 121 Plusrechnungen.

Rot: Verdoppelungen

Blau Partnerzahlen

Grün: +0, +10, +1

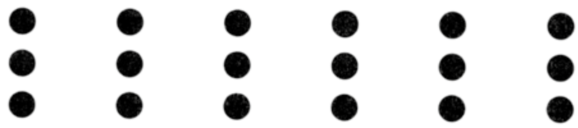
Gelb: Kraft der 5

In schräg angrenzenden Kästchen ist jeweils die Summe um 1, in horizontal benachbarten um 2 verschieden, Kästchen übereinander haben dieselbe Summe.

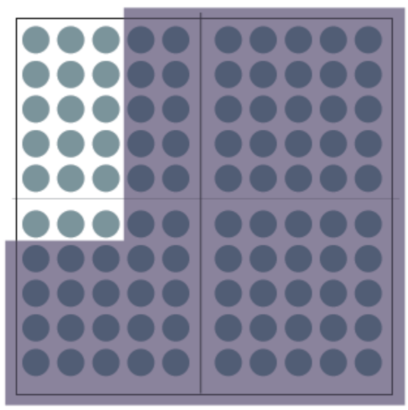
Wenn nicht mehr tatsächlich gerechnet werden muss, sondern die Zahlen-Tripel (z. B.: 8-5-3) aus dem Langzeitgedächtnis für Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 20 abgerufen werden können, sind Rechenfakten für das kleine 1+1 entstanden. Dieses Wissen kann in weiterer Folge genutzt werden, die strukturellen Übereinstimmungen in größeren Zahlenräumen zu entdecken und darauf zurückzugreifen.

Das Teil-Teil-Ganzes-Konzept ist wichtig für das Verstehen des Dezimalsystems und der statischen Auffassung der Multiplikation / Division als einer rechteckigen Anordnung der Elemente.

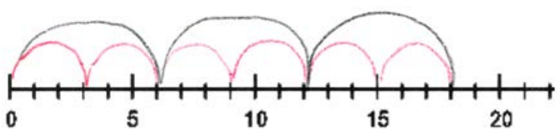
3×6 und 18:3 statisch – kardinal



6×3 und 18:6 statisch – kardinal



3×6 oder 6×3 und 18:3 oder 18:6 statisch – kardinal



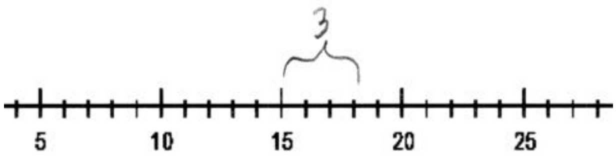
3×6 oder 6×3 dynamisch – ordinal

Verständnis für Rechenoperationen

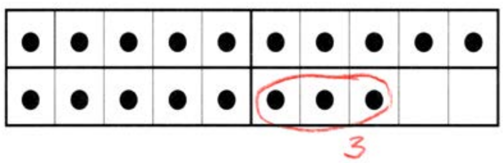
Wie bereits erwähnt verfügen bereits Kleinkinder über ein Basisverständnis für Rechenoperationen: zu einer Menge wird bei der Addition etwas dazu gegeben, bei der Subtraktion wird etwas weggenommen. Das entspricht ganz den kindlichen Sachsituationen, wenn etwas vermehrt oder vermindert wird. Im schulischen Mathematikunterricht soll dieses Verständnis anhand des Erfassens des Teil-Teil-Ganzes-Konzepts erweitert werden: Addition zeigt sich hier als die Vereinigung zweier Mengen, Subtraktion als die Abtrennung einer Teilmenge vom Ganzen. Zur dynamischen Sichtweise (hinzugeben, wegnehmen) kommt also eine statische Sichtweise der Zahlenstruktur: Addition und Subtraktion sind in einem Bild fassbar, in dem die Bewegung der Elemente nur gedacht wird: in der strukturierten Zahl.[5]

Beispiel: in  kann man leicht u.a. 3 + 5 und 8 – 3 zeigen.

Beim Ergänzen und Vergleichen kommt eine Vorstellung zum Einsatz, die als neuer Zahlenaspekt gebildet wird: die Relationalzahl. Diese ist sowohl ordinal, als auch kardinal zu deuten, weil sie ordinal den Abstand zwischen zwei Zahlenpositionen und kardinal den Unterschied zwischen zwei Mengen bezeichnet. (»Von 15 fehlen 3 auf 18, zu 15 müssen 3 hinzukommen, damit es 18 sind.«)[6]



Ordinal



Kardinal

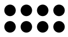
Die Semantik der Operationen wird anknüpfend an die vorschulischen Rechenerfahrungen der Kinder und in der kontinuierlichen Bearbeitung von kindlichen Sachsituationen gefestigt[7]. Die Kinder verknüpfen ihre täglichen Erfahrungen mit mathematischen Strukturen und erleben, wie Muster und Strukturen wiederum ihr Sachwissen über ihre Welt erhöhen.

In der Bearbeitung von Textaufgaben wird beim »Modellieren« auf die Semantik der Zahlen und Operationen zugegriffen – es wird der »Umweg« über die analoge Mengenvorstellung

5 Operationen und Zahlen sind also sehr eng verzahnt. Das eine kann das andere ausdrücken.

6 Diese stets zumindest doppelt interpretierbaren Modelle stellen ein entscheidendes Hindernis für rechenschwache Kinder dar, die immer alles schematisch erklärt bekommen (wollen).

7 In traditionellen Rechenbüchern kommen Textaufgaben sehr oft in Form der eingekleideten Aufgabe vor, in der das gerade gelernte Rechenkapitel in mehr oder weniger geeigneten Sachsituation geübt wird. Das für die mathematische Entwicklung so wichtige Modellieren findet so aber grade nicht statt.

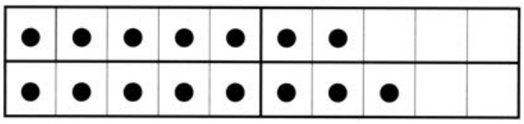
genommen. Aufgaben sollten aber nicht – wie traditionell üblich – stets im verbalen Code («Auf dem Spielplatz sind 4 Kinder. …«) formuliert werden, sondern auch vom visuell-arabischen Code (»Wie sieht 3 + 4 = 7 im Material aus?« »Mache zu 3 + 4 = 7 eine passende Rechengeschichte!«), oder dem analogen Code ausgehen (»Wie kann man  als Rechnung aufschreiben?« »Mach dazu eine passende Rechengeschichte für deine Mitschülerinnen und Mitschüler.«). Textaufgaben können insbesondere auch genutzt werden, um ein fortgeschrittenes Zahlverständnis zu entwickeln, das über die reine Zählfunktion hinausgeht. »Sandra hat vier Kaugummis mehr als Timo« bezeichnet keine konkrete Menge (Kardinalität), sondern eine Relation von zwei Mengen, einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl (Stern, 1998).

Nun kommen auch die ersten Rechengesetze ins Spiel. Für die Addition reichen in der Grundschule 2 Rechengesetze aus: das Vertauschungsgesetz [a + b = b + a] und das Verbindungsgesetz [a + (b + c) = (a + b) + c]. In dieser formalen Fassung sind diese Gesetze erst in der Sekundarstufe relevant, sie beherrschen aber schon das Rechnen der untersten Stufe, wenn sie »operativ« im Rechnen als Tätigkeit gedeutet werden (vgl. Wittmann, 2011). Dies gelingt, wenn die in diesen Gesetzen verborgenen Handlungen an geeigneten Zahlendarstellungen entdeckt werden. Die Anwendung des Vertauschungsgesetzes ist sehr einfach durch Platzwechsel bei einer strukturierten Zahlendarstellung zu erreichen und dient der Vereinfachung der Vorstellung sehr ungleicher Summanden. (Beispiel: 2 + 8 ist schwerer vorstellbar als 8 + 2). Es gilt bei Addition und Multiplikation.

Das Verbindungsgesetz erlaubt drei verschiedene Interpretationen, die für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen Rechnungen entscheidend sind:

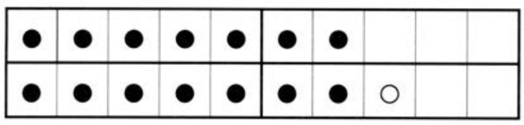
- Eine Summe kann schrittweise berechnet werden, indem Mengen in Untermengen zerlegt und anders wieder zusammengesetzt werden. [Beispiel: 7 + 8 = (5 + 2) + (5 + 3) = (5 + 5) + (2 + 3) = 10 + 5 = 15] (Zehnerübertritt mit der Kraft der 5)

Zehnerübertritt mit der Kraft der 5



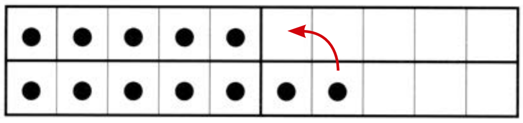
- Wenn ein Summand um einen bestimmten Wert erhöht wird, wird die Summe um den gleichen Wert erhöht. [Beispiel: 7 + 8 = 7 + (7 + 1) = (7 + 7) +1 = 14 + 1 = 15] (Ableitung einer Zehnerüberschreitung aus der Verdoppelung)

Ableitung einer Zehnerüberschreitung aus der Verdoppelung



- Wenn ein Summand auf Kosten des anderen Summanden erhöht wird, bleibt die Summe gleich. [Bespiel: 7 + 5 = (7 – 1) + (5 + 1) = 6 + 6] (gegensinniges Verändern)

Gegensinniges Verändern



Die operative Anwendung dieser Rechengesetze, die Nutzung zur Vereinfachung von Rechenwegen und die sich daraus ergebende Perspektive, schwierige Rechnungen nach Möglichkeit aus einfachen Rechnungen zu entwickeln, hilft bei der Vertiefung des »denkenden« Rechnens (Wittmann, 2011), das in der Vergangenheit nur für die Mathematiktalente unter den Schulkindern reserviert schien. Gerade Kinder, die sich mit dem Rechnen schwerer tun, fahren mit den Werkzeugen, die in der Natur der Mathematik liegen, am besten (vgl. Gaidoschik, 2010). Reflexion und Kommunikation über Zusammenhänge in produktiven Übungsformaten und herausfordernden Aufgaben[8] und das Verstehen der Rechenwege anderer Kinder aktivieren die inneren Vorstellungen. Mechanisches Üben von formalen Rechnungen leistet dies nicht.

In der Multiplikation/Division lernen die Kinder einen bisher unbekannten Zahlenaspekt kennen: die Zahl als Operator. Anders als bisher gewohnt stellen die geschriebenen Ziffern nicht mehr ausschließlich eine Menge (»Wie viele?«), sondern einen Vorgang (»Wie oft?«) dar. (Bei 3 + 5 ist mit 3 die Anzahl gemeint, zu der die Anzahl 5 dazu gegeben wird. Bei 3 × 5 ist mit 3 die Wiederholung gemeint, wie oft die Anzahl 5 genommen wird). Das kleine 1 × 1 gehört zu den Kernbereichen des rechnerischen Faktenwissens (Gaidoschik, 2015), weil dessen Automatisierung (spätestens Mitte der 3. Schulstufe) eine Voraussetzung für das Verständnis der Division und der Brüche darstellt und schriftliche Rechenverfahren ermöglicht. Die Kernaufgaben der Multiplikation, die Verdoppelung, die Verzehnfachung und die Verfünffachung (über das Halbieren) sind relativ leicht vorstellbar und damit gut zu merken.[9] Die anderen Aufgaben können und sollten über Ableitungsstrategien erarbeitet werden. Zum Beispiel können Kinder 9 × 7 als 10 × 7 – 1 × 7 ableiten. Voraussetzung dafür sind die Automatisierung von Addition, Subtraktion und Zerlegung im Zahlenraum 10 und Einsicht in das Dezimalsystem und Strategien für Stellenüber- und Stellenunterschreitungen.

Das Dividieren stellt die Umkehrung des Multiplizierens dar und analog zur Unterscheidung von Multiplikator und Multiplikand gibt es zwei Grundformen: Das Verteilen (»24 Karten werden an 6 Kinder gerecht verteilt, wie viele Karten erhält jedes Kind?«) und das Aufteilen (»24 Karten werden verteilt, jedes Kind bekommt 4 Karten. An wie viel Kinder kann man austeilen?«)

Dezimalsystem

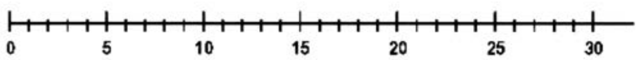
Das arabische Zahlen-/Ziffernsystem beruht auf dem Prinzip, dass an einer Stelle höchstens 9 stehen darf. Jeweils 10 einer Stelle werden zu einer 1 eine Stelle höher gebündelt. (Beispiel: aus 10 Einern wird 1 Zehner, aus 10 Hundertern wird 1 Tausender). Um mit beliebig großen Zahlen umgehen zu können, bedarf es des sicheren Umgangs mit den Zahlen bis einschließlich 10 und vor allem der Einsicht in die Funktionsweise des Stellenwertsystems (vgl. Gaidoschik, 2007). Den Kindern tritt das Dezimalsystem zuerst in Form der zweistelligen Zahlen entgegen, bei denen nun deutlich zwischen Ziffern und Zahlen unterschieden werden muss. (Beispiel: 12 besteht aus den Ziffern 1 und 2, aber aus den Zahlen 10 und 2). Diese Unterscheidung gelingt, wenn Kinder den Bündelungsgedanken verstanden und auch verallgemeinert haben.

8 Entgegen dieser Maxime bestehen die meisten Aufgaben in Rechenbüchern in Dingen »die bereits gelernt« sind und in Übungseinheiten unzusammenhängender formaler Übungen.

9 Tatsächlich werden oft noch flächendeckend die »Malreihen« der Reihe nach direkt auswendig gelernt. Weil wir Erwachsene es so gelernt haben, besteht weitgehend die Meinung, die Malreihen müssten eben auswendig gelernt werden.

Ohne diese Verallgemeinerung stellt die Bündelung an größeren Stellen für viele wieder eine neue Hürde dar. Sie müssen verstehen, dass nicht nur 10 Einer 1 Zehner sind, sondern dass jede Stelle größer mal 10 bedeutet. Die Darstellungsmittel und inneren Vorstellungen sind wieder ordinal und kardinal organisiert: Ordinal der Zahlenstrich und die Hundertertafel, kardinal das Hunderterfeld und für die Stellenwerte speziell das Systemmaterial[10], das die Bündelung dreidimensional erfahrbar macht. 10 Einerwürfel ergeben eine Zehnerstange, 10 Zehnerstangen ergeben eine Hunderterplatte, 10 Hunderterplatten ergeben einen Tausenderwürfel, 10 Tausenderwürfel ergeben eine Zehntausenderstange etc.. (Wenn der Einerwürfel wie üblich 1 cm Seitenlänge hat, dann kann man sich die Million als einen Würfel von 1 m Seitenlänge und die Milliarde als einen Würfel von 10 m Seitenlänge vorstellen.)[11] Stellenwerttafeln verdeutlichen die stabile Ordnung des Systems (Beispiel: 1347 = 1×1000 + 3×100 + 4×10 + 7×1) fördern das stellengerechte Schreiben und bereiten auf die schriftlichen Rechenverfahren vor.

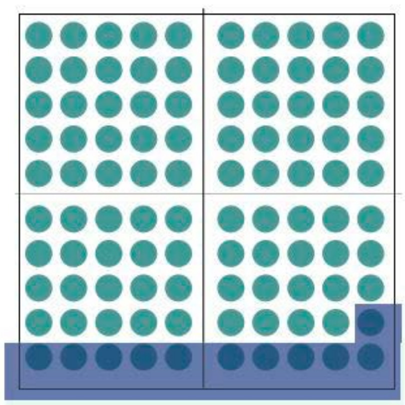
Zahlenraum 30



Das Muster der Dreierreihe auf der Hundertertafel

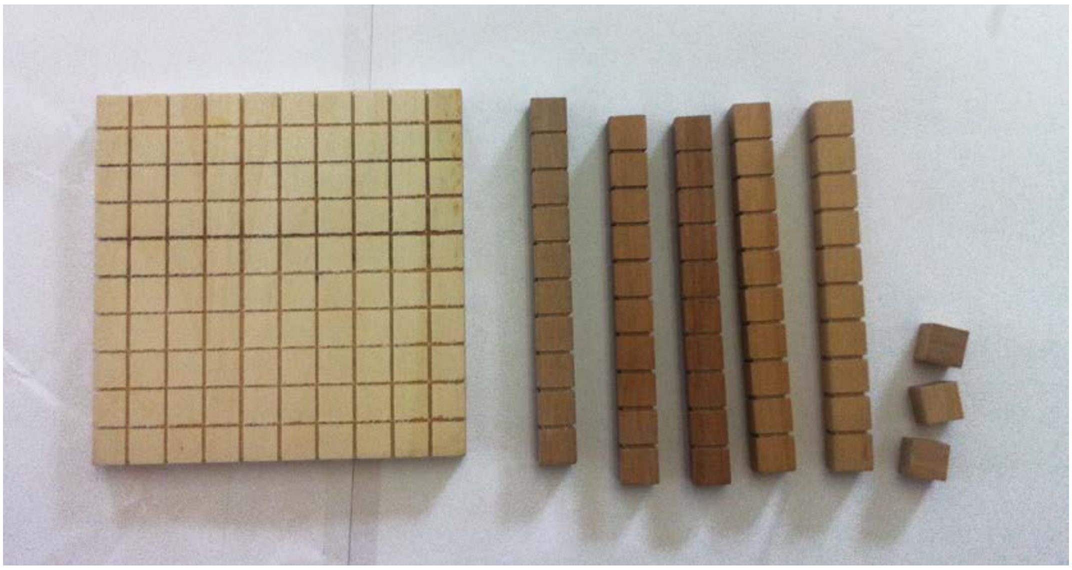
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

89 auf dem Hunderterfeld



10 Dienes Systemmaterial (von Zoltan Paul Dienes 1916-2014, ungarisch-englischer Mathematiker)

11 Die ordinalen Veranschaulichungen eigenen sich besonders für die Verortung der Zahlen und für das sichtbar machen von Mustern, die kardinalen Veranschaulichungen sind für das Rechnen essentiell, kann man damit doch den Mengenaspekt der Zahlen und die Rechenvorgänge sehr gut veranschaulichen. Hier sei noch einmal darauf verwiesen, dass sich nummerierter Zahlenstrahl und Hunderterfeld als Veranschaulichung von Rechenvorgängen nur für zählendes Rechnen eigenen und sie damit das, was in Rechenbüchern als ihr Zweck vorgegeben wird, nämlich das Rechnen zu erleichtern, nicht erfüllen.



Dienes Systemmaterial »153«

H	Z	E
•	•	•••

Stellenwerttafel »153«

Schriftliche Rechenverfahren

Ab der 3. Klasse werden Kinder mit den standardisierten Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren vertraut gemacht. In der traditionellen Sichtweise gelten diese als die »Krönung des Rechenunterrichts« (Krauthausen, 1993) und in der Öffentlichkeit wird z. B. bei Lehrlingen als Zeichen für mangelnde Schulbildung beklagt, dass diese »nicht einmal schriftlich multiplizieren« könnten. Der Wert dieser Standardverfahren liegt in der Erleichterung, der größeren Schnelligkeit und Sicherheit beim Rechnen mit großen Zahlen, weil nur mit (kleineren) Ziffern gerechnet wird und die Ausführung des Gesamtverfahrens in wiederholter Anwendung der immer gleichen elementaren Rechenschritte besteht. Die quantitative Bedeutung der Zahlen wird erspart und muss erst wieder im Ergebnis interpretiert werden. Dieser Vorteil ist in der herkömmlichen Unterrichtspraxis zugleich ein Nachteil. Indem oft auf kürzestem Weg die formalen Algorithmen »beigebracht« werden und diese dann als Verhaltensanweisung über fast zwei Schuljahre mechanisch geübt, kontrolliert und wieder geübt werden, können diese Verfahren sogar zu »kognitiver Passivität« bei den Kindern führen, die die Vorstellungsneutralität der Rechenschritte auf das Rechnen an sich ausdehnen. Sie können diese Verfahren, die jeweils genormt sind[12], für das »eigentliche« Rechnen halten, bei dem es nichts zu verstehen gilt, aber die strengen Vorschriften genau einzuhalten sind (Mathematik hat vielleicht auch deswegen allgemein den Ruf, formal, undurchschaubar und streng zu sein). Wie bei den »Rechenfakten« (das 1+1 im Zahlenraum 20 und das kleine 1×1) sind bei den formalen Algorithmen und Rechenprozeduren aufgrund des Ziffernrechnens keine inneren Modelle tätig, außer die in der Gedächtnisfunktion gespeicherten Abfolgen der Rechenschritte und die im Arbeitsgedächtnis

12 Wenn sich auch beim Blick über die Grenzen zeigt, dass diese Verfahren durchaus jeweils «anders« genormt sind. Beispiel: Subtraktion mit Abziehverfahren in Norddeutschland, mit Ergänzungsverfahren in Österreich.

verankerten Zwischenergebnisse, Überträge etc.. Wie deutlich das konzeptuelle Verständnis für Rechenoperationen und die Beherrschung von Rechenprozeduren divergieren können, zeigen Beobachtungen an brasilianischen Straßenkindern, die schnell und effizient das Wechselgeld berechnen konnten, wenn sie Obst an Touristen verkauften, aber an denselben Aufgaben kläglich scheiterten, wenn sie als schriftliche Rechnungen mit mehrstelligen Zahlen präsentiert wurden (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985).

Was in herkömmlicher Unterrichtspraxis oft nur als Vorstufe zu den schriftlichen Verfahren gilt, ist für die mathematische Entwicklung der Kinder von großer Bedeutung: das halbschriftliche Rechnen und das Kopfrechnen. Statt ausschließlich mit Ziffern wird bei diesen Verfahren mit Quantitäten im Zahlenraum operiert und schon zeigt sich wieder die Vielfalt der Lösungswege, die bewegliches Denken unterstützt (vgl. Wittmann & Müller, 1992). Kopfrechnen unterscheidet sich von den halbschriftlichen Verfahren durch die explizite Notierung der Rechenwege beim halbschriftlichen Rechnen. Die Hauptstrategien bei der Addition sind »Stellenwerte extra«, »Schrittweise« und »Vereinfachen«, bei der Subtraktion kommt noch »Auffüllen« dazu. Dabei ist es nicht Sinn des Unterrichts, alle diese Strategien explizit beizubringen, sondern die Kinder sollen sich die beim Kopfrechnen je nach Ausgangszahl und individueller Vorliebe flexiblen Vorgänge selbst bewusst machen und über das Vergleichen mit den Lösungen anderer Kinder die Zusammenhänge im Zahlenraum verstehen. Nach und nach können sich gemäß dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung besonders geeignete Verfahren herausbilden.

479 + 135 = 500 + 100 + 14 = 614 400 + 100 = 500 70 + 30 = 100 9 + 5 = 14	Addition »Stellenwerte extra«
479 + 135 = 614 479 + 100 = 579 579 + 30 = 609 609 + 5 = 614 479 + 135 = 614 479 + 30 = 509 509 + 100 = 609 609 + 5 = 614	Addition »Schrittweise« (es gibt mehrere Varianten)
479 + 135 = 614 480 + 134 500 + 114	Addition »Vereinfachen«

In den diversen halbschriftlichen Strategien können die Kinder die Gesetzmäßigkeiten anschaulich entdecken, auf die auch die schriftlichen Algorithmen zurückgreifen.[13]

13 Eine Relativierung der schriftlichen Verfahren zugunsten der halbschriftlichen Strategien und des Kopfrechnens wird von der Mathematikdidaktik seit dem Projekt Mathe 2000 (1991 in Dortmund) gefordert.

Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

ROSINA HAIDER UND HUBERT SCHAUPP

Begriffe: Rechenschwäche, Dyskalkulie, Rechenstörung

Die Bezeichnung »Schwierigkeiten beim Rechnenlernen« wird synonym zu den Begriffen Rechenschwäche, Dyskalkulie und Rechenstörung verwendet. Das entspricht der zurzeit gebräuchlichen wissenschaftlichen Praxis, weil keiner dieser Begriffe befriedigend wissenschaftlich geklärt ist (vgl. Lenart, Schaupp & Holzer, 2014).

Kinder gelten dann als rechenschwach, wenn sie trotz adäquater Förderung und angemessenen Bemühens in ihrem kindlichen Denken mangelhafte Vorstellungen, fehlerhafte Denkweisen und dadurch ungeeignete Lösungsmuster für die mathematischen Grundlagen wie Zahlenaufbau und Grundrechenarten entwickeln.

Rechenerwerbsschwierigkeiten treten in unterschiedlichen Ausprägungsgraden und Erscheinungsbildern auf und sind in etwa gleich häufig wie Lese-/Rechtschreibschwierigkeiten.

Risikofaktoren

Individuelle Unterschiede im Erwerb von mathematischen Kompetenzen sind bereits frühzeitig erkennbar. Daher sind theoriegeleitete Präventionsmaßnahmen, die schon im Kindergartenalter einsetzten, ein gutes Mittel, um schulische Folgeprobleme gering zu halten oder abzuwenden. Je später Interventionen gesetzt werden, desto wahrscheinlicher ist, dass sich bei betroffenen Schülerinnen und Schülern bereits eine Sekundärsymptomatik herausgebildet hat. Wiederholte Misserfolge führen oft zu erheblichen Motivationsdefiziten und Vermeidungstendenzen (vgl. Schneider, Küspert & Krajewski, 2013).

Die meisten Kinder verfügen beim Eintritt in die erste Schulstufe bereits über ein grundlegendes Zahl- und Mengenkonzept und verstehen auch die Grundlagen der Addition und Subtraktion, allerdings wird nun der Zahlenraum, in dem gearbeitet wird, immer größer. Untersuchungen mit Kindern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen aufwiesen, haben immer wieder gezeigt, dass ihr Kerndefizit in basalen mathematischen Kompetenzen liegt. Von daher ist es unumgänglich, bei Interventionen auch dann numerische Basisfähigkeiten einzubeziehen, wenn in der betreffenden Schulstufe bereits viel komplexere mathematische Probleme behandelt werden (vgl. Landerl & Kaufmann, 2013).

Erkennungsmerkmale – Symptome

Kompetenzebenen zur Entwicklung der Zahl-Mengenverknüpfung und mögliche Schwierigkeiten (vgl. Schneider et al., 2013)

Zählen (Zahlwörter ohne Mengenbezug)

- Fehler- und lückenhaftes Aufsagen der Zahlwortreihe
- Probleme beim Weiterzählen von einer höheren Zahl
- Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen, z. B. von 5 weg
- Zahlennachbarn können nicht spontan genannt werden

Mengen-/Größenbewusstheit von Zahlen (Verknüpfung von Zahlwörtern mit Mengen)

- Probleme bei der Eins-zu-Eins-Zuordnung
- Fehlendes Bewusstsein, dass beim Zählen Mengen bestimmt werden
- Schwierigkeiten beim Kategorisieren der Begriffe viel oder wenig
- Schwierigkeiten mit Vergleichen von Mengen (»mehr«, »weniger«, »gleich viel«).
- Fehlendes Verständnis dafür, dass Mengen gleich bleiben, wenn nichts hinzugefügt oder weggenommen wird (Mengenkonstanz)
- Fehlendes Verständnis dafür, dass Mengen zerlegt und wieder zusammengesetzt werden können (Teile-Ganzes-Schema)

Verständnis für Beziehungen zwischen Zahlen (Verknüpfung von Zahlwörtern mit Mengenrelationen)

- Probleme beim Erkennen, dass auch Zahlen in das Teile-Ganzes-Schema eingeordnet werden können und so die Zahlzerlegung möglich wird.
- Schwierigkeiten beim Erkennen, dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen durch eine Zahl ausgedrückt werden kann.

Verfestigtes zählendes Rechnen

Zählen ist zu Beginn des Rechnenlernens die einzige und zu diesem Zeitpunkt auch eine durchaus sinnvolle und erfolgreiche Strategie. Spätestens im Zahlenraum 100 führt zählendes Rechnen häufig zu falschen Ergebnissen, auch wenn dieses im Zahlenraum 20 noch in vergleichsweiser kurzer Zeit und sicher zu richtigen Ergebnissen geführt hat. Anhaltend zählendes Rechnen blockiert den Aufbau nicht-zählender Strategien.

Aus der Literatur der aktuellen Fachdidaktik kann abgeleitet werden, dass Kinder von Anfang an Strategien des nicht-zählenden Rechnens erwerben sollten.

Schwierigkeiten beim Stellenwertverständnis

Verfestigtes zählendes Rechnen kann die Ursache für eine unzureichende Entwicklung des Stellenwertverständnisses sein, weil die besondere Rolle der Zahl 10 nicht deutlich wird und weil die Einsicht in die Zusammensetzung von Zahlen aus Einern und Zehnern nicht erlangt werden kann. Für das Verständnis des Stellenwertsystems ist das Verständnis des Zusammenhanges Zahlwort, Menge und Zahlzeichen notwendig.

Die Unstimmigkeit von Notation (zuerst links der Zehner, dann rechts der Einer) und der Sprechweise (zuerst Einer, dann Zehner) kann zu Problemen bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses führen. So zeigen sich sogenannte Zahlendreher, wenn die inverse Schreibweise nicht konsequent eingehalten wird. Die Unterscheidung von Zehnern und Einern wird erschwert und spätestens bei dreistelligen Zahlen kommt es zu Problemen, weil bei der Notation »freier Platz« gelassen werden muss. Auch die spätere Verwendung des Taschenrechners wird nachhaltig behindert.

Probleme beim Aufbau von Grundvorstellungen zu Operationen

Aufgrund des verfestigten zählenden Rechnens und mangelndem Stellenwertverständnis kann der Aufbau von Grundvorstellungen nicht oder nur unzureichend gelingen. Mit Aufbau von

Grundvorstellungen ist gemeint, dass die Lernenden von konkreten Handlungen mit geeigneten Materialien zum Handeln in der Vorstellung kommen.

Entstehung von Schwierigkeiten beim Rechnenlernen

Als schulischer Risikofaktor gilt ein Unterricht, der zu früh (und ohne beim Kind Verständnis hergestellt zu haben) zum Üben und Automatisieren fortschreitet. Damit in Zusammenhang steht häufig die mangelnde Fähigkeit zu individueller Einschätzung der Voraussetzungen und des Entwicklungsstandes der Kinder sowie ein didaktisch lineares Vorgehen (mangelnde Individualisierung und dann auch Differenzierung).

Im familiären bzw. schulergänzenden Bereich ist oft das Übersehen von Entwicklungsverzögerungen vor der Einschulung und während der Schulzeit als Ursachen zu nennen. Hinzu kann dann auch das ungewollte Verwirren der Kinder durch »alternative« (aber mathematisch falsche) Rechenmodelle und vereinfachende Tricks kommen. Zu oft wird jedoch durch forciertes Üben (im Sinne von Auswendiglernen) oder durch ein »Mehr-von-Demselben« nicht nur nicht geholfen, sondern eine weitere Störung aufgebaut, welche als Sekundärstörung bezeichnet wird. Sicher stellt in der Regel das Annehmen der Rechenschwäche des Kindes durch die Eltern ein Problem dar, das mit entsprechender Sensibilität auch ernst zu nehmen ist.

Sekundäre Symptome

Die meisten Kinder, die in die Schule kommen, freuen sich darauf, bemühen sich sehr, wollen gut sein, Anerkennung bekommen, und wollen, dass Eltern und Lehrer/in mit ihnen zufrieden sind. Rechenschwache Kinder machen schon bald in der 1. Schulstufe die Erfahrung, dass trotzdem zu Hause und in der Schule fleißig geübt wird, das Rechnen nicht leichter wird. Im Gegenteil, je größer der Zahlenraum wird, desto schwieriger wird es.

Je mehr Elternhaus und Schule sich mit nur wenig Erfolg bemühen, desto mehr wird das Kind die Ursachen seines Versagens bei sich selbst suchen. Viele Eltern fragen sich in dieser Situation zunehmend ungeduldig, was am Rechnen so schwer sein soll! Bei gleich bleibendem Misserfolg wird dann zwischen Elternhaus und Schule oft die Ursache dafür beim jeweils anderen gesucht.

Unwissenheit über die Ursachen von Rechenschwierigkeiten führt somit oft zu gegenseitig schwindendem Vertrauen zwischen Elternhaus und Schule, zu einer Spirale von mehr Üben mit wenig hilfreichen Fördermaßnahmen, bescheidenem Erfolg, gegenseitigen nicht hilfreichen Schuldzuweisungen, Missverständnissen. Das Kind spürt von allen Seiten den Druck und muss darauf reagieren. Die meisten Kinder entwickeln gegen Mathematik eine Abneigung, manche auch gegen die Lehrerin/den Lehrer und gegen das Üben an sich. Manche beginnen mit körperlichen Symptomen ihr Unbehagen auszudrücken, sie schlafen schlecht, leiden unter Übelkeit, Kopfschmerzen etc. und entwickeln ein Gefühl der Unzulänglichkeit. Insgesamt ist eine schwindende Leistungsbereitschaft oft die Folge.

Mögliche Anzeichen solcher Sekundärsymptome

Rechenangst, Schulunlust, mangelnde Motivation, Selbstwertprobleme, Verhaltensschwierigkeiten, somatische Beschwerden

Verantwortung der Schule

ANGELIKA LANG

Rechnenlernen erfolgt wesentlich im schulischen Kontext. Kinder starten mit sehr unterschiedlichen Voraussetzungen in den schulischen Mathematikunterricht und die schwierige Aufgabe der Schule und damit der Lehrpersonen besteht darin, ihre Schülerinnen und Schüler in ihren individuellen Gegebenheiten zu erkennen und auf ihrem Weg in die Welt der Zahlen und des Rechnens zu begleiten und so gut wie möglich zu unterstützen. Während es bei manchen Kindern von Anfang an lediglich darauf ankommt, sie durch anregende Aufgabenstellungen dazu anzuhalten, ihre bereits sicher grundgelegten Rechenleistungen und mathematischen Kompetenzen stetig zu erweitern, sind andere Kinder während ihrer gesamten Schullaufbahn darauf angewiesen, dass der Erwerb der Rechenleistungen in für sie bewältigbare Lernschritte zerlegt wird und sie beständig dazu motiviert werden, diese Teilschritte in ihrem individuellen Lerntempo zu durchlaufen, auch wenn diese Lernwege nicht der Norm entsprechen. Außerschulische Ressourcen (insbesondere elterliche Unterstützung, schulpsychologische Beratung, ggf. therapeutische Maßnahmen) können und sollen hilfreich ergänzend zum Einsatz kommen und in der täglichen schulischen Arbeit genutzt werden, sie können diese aber keinesfalls ersetzen. Die gewählten Maßnahmen sollen stets dazu dienen, die Bildungschancen von Kindern mit Schwierigkeiten im Erwerb der Rechenleistungen zu wahren.

Wie erkenne ich ein rechenschwaches Kind?

Bei einer Rechenschwäche können verschiedene Teilbereiche des mathematischen Denkens betroffen sein. Früh nicht verstandene oder nicht gefestigte Rechenwege können zu einem verminderten Verständnis von aufbauenden Rechenvorgängen führen und somit zu einem chronischen mathematischen Verständnisproblem. Die frühzeitige Erkennung von Rechenschwierigkeiten ist somit essentiell.

Relevante Fähigkeiten, die eine Grundlage für ein gutes mathematisches Verständnis in der Schuleingangsphase darstellen, sind

- Zählfertigkeiten
- Aufschreiben von Zahlen
- Mengenvergleiche
- Zahlenzerlegen
- Längenvergleiche
- Eins- zu Eins-Zuordnungen
- Objekte nach der Größe ordnen
- Erkennen von Invarianzen
- Durchführen von alltagsbezogenen einfachen Rechnungen

Zwei markante Punkte, die Kinder beim Erwerb von mathematischem Grundverständnis im Erstunterricht erreichen sollten, sind:

- die **Integration von Mengen- und Zahlenwissen zum Kardinalzahlenbegriff.**
  - Das bedeutet, das Verständnis zu erwerben, dass Zahlen auch Mengen darstellen.

- das **Teil-Teil-Ganzes-Konzept** als grundlegendes Konzept der Mengen- und Zahlenzerlegung.
  - Dieses Verständnis umfasst die Einsicht, dass sich Mengen aus Teilmengen zusammensetzen.

Bei fortgeschrittener Schullaufbahn haben Kinder mit einer Rechenschwäche meist einige Kompensationsstrategien entwickelt, wie zum Beispiel eine hohe Geschwindigkeit im zählenden Rechnen, um mit den anderen Kindern Schritt halten zu können. Da das zählende Rechnen aber keine aufbaufähigen Konzepte beinhaltet, treten bei rechenschwachen Kindern verschiedene Defizite auf.

Schwierigkeiten können sein:
- Schwierigkeiten in der Zuordnung von Mengen und Zahlen
- beeinträchtigtes Verständnis der Zahlenwortsequenz (vorwärts, rückwärts zählen)
- Unklarheit über mathematische Begriffe (mehr als, weniger als …)
- Probleme beim Rechenoperationsverständnis
- Vertauschen von Rechenzeichen
- Zahlendreher (»39« statt »93«)
- kein Loslösen vom zählenden Rechnen
- Schwierigkeiten im Aufbau und Abruf des mathematischen Faktenwissens
- Langsames Rechentempo aufgrund wenig effizienter Rechenstrategien
- fehlendes Verständnis des Stellenwertsystems

Sind längerfristig trotz Berücksichtigung der Schwierigkeiten im schulischen Unterricht grobe Lücken im Verständnis von Rechenwegen oder fehlerhafte Rechenstrategien zu beobachten, so wird zusätzlich eine Förderdiagnostik empfohlen (z.B. SchulpsychologInnen, klinische PsychologInnen, speziell ausgebildete Förderlehrkräfte,…).

Was ist bei der Förderung grundsätzlich zu beachten?

Wenig hilfreich – basales Teilleistungstraining

In den vergangenen Jahrzehnten gingen manche Förderansätze davon aus, dass Störungen im Teilleistungsbereich, wie Störungen der visuellen oder auditiven Wahrnehmung, eng mit einer Rechenschwäche verbunden sind. Obwohl Teilleistungen direkt oder indirekt an allen höheren Denkfunktionen, also auch dem Rechnen beteiligt sind, sind sie jedoch nicht typisch für das Auftreten einer Rechenschwäche. Auf dieser Auffassung basierende Förderansätze zielten in erster Linie auf das Trainieren dieser Teilleistungen ab und erst in zweiter Linie auf die Unterstützung des Fertigkeitserwerbs. Es wurde die defizitäre Teilleistung, nicht aber die Rechenfertigkeit als Ganzes trainiert. Es gibt bisher keine überzeugenden Belege, dass Trainings der Rechts- und Links-Orientierung oder der Händigkeit statistisch bedeutsame Verbesserungen der mathematischen Fähigkeiten erzielen können. Auch positive Effekte von Teilleistungstrainings für die Rechenleistungen sind bisher nicht belegt. Oft verbessert sich zwar die trainierte Teilleistung, ein Transfer auf die Schulleistung bleibt aber in den meisten Fällen aus.

Übung macht den Meister?

Für rechenschwache Kinder bedeutet viel Üben, dass sie viele Rechnungen zählend lösen. Der ineffektive Lösungsweg, den das Kind anwendet, wird häufig übersehen, weshalb das viele Üben keine nachhaltigen Erfolge bringt. Das zählende Rechnen und das Unverständnis werden dadurch verstärkt, was auch der Grund dafür ist, dass kein Automatisieren der Rechenwege stattfindet. Häufig wird die Ursache für das Ausbleiben der Erfolge fälschlicherweise als Gedächtnisproblem gesehen.

Wenig hilfreich – Anschauungsmaterial ohne pädagogische Begleitung zur Verfügung stellen

Rechengänge nachzuvollziehen ist für alle Kinder wichtig. Um den Kindern ein besseres mathematisches Verständnis zu vermitteln, ist der Einsatz von Materialien sehr hilfreich. Das Kind soll dadurch den Sachverhalt erfassen. Daher ist der Einsatz von geeignetem Anschauungsmaterial zum Erarbeiten von Zahlen und Operationen von besonders großer Bedeutung.

Jeder Materialeinsatz muss pädagogisch begleitet werden. Bei zählend rechnenden Kindern besteht die Gefahr, dass das Material nicht zum tieferen Verständnis von Rechenoperationen verwendet wird, sondern um durch Abzählen zu einem richtigen Ergebnis zu kommen. Nicht das Material selbst ist entscheidend für den Erfolg, sondern seine richtige Verwendung. Das Ziel dieser Arbeitsweise ist es, das Kind soweit zu unterstützen, dass der Einsatz von Materialien überflüssig wird.

Verstehen vor Automatisieren

Bei rechenschwachen Kindern wird das Auswendiglernen von kurzen Rechnungen häufig als letzte Möglichkeit zur Förderung gesehen. Im Zahlenraum 10 existieren alleine jedoch bereits 66 verschiedene Additionsmöglichkeiten und ebenso viele Subtraktionsmöglichkeiten, sodass unverstandenes Auswendiglernen nicht nachhaltig ist. Zählend rechnende Kinder sehen den Zusammenhang dieser Einzelfakten nicht. Wenn Kinder es dennoch schaffen, sich viele dieser Zahlenkombinationen ohne tieferes Verständnis zu merken, scheitern sie häufig an den Sachaufgaben oder aufbauenden Rechenoperationen, weil sich die Bedeutung der Rechenoperation noch nicht erschlossen hat. Automatisieren soll nicht an die Stelle des Verstehens treten!

Rechenoperationen im Zahlenraum 10 sollten am Ende des ersten Schuljahres verstanden, und anschließend automatisiert werden. Ist das gelungen, müssen Zahlensätze im Zahlenraum 10 nicht mehr abgeleitet werden, sondern sind bereits im Langzeitgedächtnis abgespeichert. Das Erarbeiten von Ableitungsstrategien unterstützt auch das Automatisieren, weshalb ein Unterricht, der auf das Erforschen von Zusammenhängen ausgelegt ist, auch mit zeitlich begrenzten Automatisierungstrainings (5 bis 10 Minuten mehrmals in der Woche) kombiniert werden sollte (Gaidoschik, 2012). Das Automatisieren von verstandenen Rechenvorgängen entlastet den Arbeitsspeicher, was die Fehleranfälligkeit und den Energieaufwand reduziert (Born & Oehler, 2011).

Aufgaben der schulischen Förderung

Analyse der Denkwege

Am Anfang (und auch in der weiteren Begleitung) jeder Förderung soll die eingehende Analyse der Denkwege des Kindes stehen. In der Förderung und im Unterricht ist es daher sinnvoll, die Kinder laut denken zu lassen oder sich die Überlegungen anhand von Materialien vorzeigen zu lassen. Erst wenn der Denkprozess des Kindes erfasst wurde, kann die Förderung gezielt angesetzt und aufgebaut werden.

Defizite in einer höheren Schulstufe

Sollten Kinder ab der dritten Klasse noch Schwierigkeiten im Grundlagenbereich des Rechnens haben, muss sehr wahrscheinlich ein mathematischer Neuaufbau erfolgen. In der Grundstufe 1 kann parallel zum erarbeiteten Stoff spezifisch fachdidaktische Förderung geschehen. Voraussetzung dafür ist es, dass die kindlichen Rechenprobleme frühzeitig richtig erkannt werden.

Die Materialfrage
Für den Aufbau innerer Konzepte des Rechnens ist der Umgang mit konkretem Material von maßgeblicher Bedeutung. Die verwendete Veranschaulichungsmethode muss daher unbedingt auf die Rechenoperation abgestimmt werden, die vermittelt werden soll. Da der Umgang mit dem Material vom Kind erst erlernt werden muss, ist eine Begrenzung der Materialfülle sinnvoll. Von zentraler Bedeutung ist, dass das Material nicht dem Ermitteln einzelner Rechenergebnisse dient, sondern zum Erforschen von Zusammenhängen genutzt wird.

Ablösung vom zählenden Rechnen
Rechenschwache Kinder wenden häufig zählendes Rechnen an. Dies stört jedoch das tiefere Verständnis von dezimalen Strukturen und Zahlen können nicht in größere Einheiten zusammengefasst werden. Um das zählende Rechnen hinter sich zu lassen, sollte neben einer sicheren Zählkompetenz ein mentales Vorstellungsbild von Zahlen bestehen. Ebenfalls sollte das Kind Teil-Ganzes und Zahlenbeziehungen herstellen, sowie operative Beziehungen ableiten können (Gaidoschik, 2009).

Förderstrategien

Verstehen und Automatisieren
Rechenoperationen im Zahlenraum 10 sollten am Ende des ersten Schuljahres nach Möglichkeit nicht nur verstanden, sondern auch automatisiert werden.

Komplexere Rechenvorgänge können bei mangelndem Verständnis aufgrund des ungenügend gefestigten Fundaments beeinträchtigt sein. So ist etwa das Einmaleins nicht schnell abrufbar und muss immer neu errechnet werden (durch Hochzählen oder Fingerrechnen). Solche Prozeduren sind sehr fehleranfällig und benötigen zu viel Energie.

Gefahren beim selbstständigen Finden von Lösungswegen
Grundsätzlich ist es natürlich von Vorteil, wenn ein Kind sich Lösungswege selbst erarbeitet. Bei rechenschwachen Kindern besteht jedoch die Gefahr, dass lange Umwege eingeübt werden, um zur Lösung einer Aufgabe zu kommen. Die pädagogische Aufgabe besteht darin, das Kind dabei zu unterstützen den kürzesten Weg zur Lösung zu finden. Schwierigkeiten wie verlangsamtes Arbeitstempo oder erhöhte Fehleranfälligkeit aufgrund umständlicher Rechenstrategien können so vermieden werden.

Förderung der Ablösung vom zählenden Rechnen
Da der Ablösung vom zählenden Rechnen eine zentrale Rolle bei der Prävention von Rechenschwächen zukommt und dieser Vorgang zwar allerorts gewünscht, aber in den meisten Schulbüchern nicht zielführend vollzogen wird, wird diesem hier etwas mehr Platz eingeräumt. Exemplarisch soll hier ein fachdidaktisch abgesichertes und praktisch erprobtes Förderkonzept zur Ablösung vorgestellt werden, das 2014 von Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser-Opitz, und Wittich präsentiert wurde. In diesem Konzept werden rechenschwache Kinder nicht isoliert, vielmehr werden die Vorteile heterogener Lerngruppen (also der ganzen Klasse) für die Förderung aktiv genutzt.

Mit substanziellen Lernumgebungen wird differenziert an zentralen Inhalten der Rechenentwicklung gearbeitet. Von der Teil-Ganzes-Zerlegung über die Strukturierung des Zahlenraums durch Zählen in Schritten und Arbeiten mit dem leeren Zahlenstrahl geht es bis zum Rechnen in Zahlbeziehungen. Ziel des Förderprogramms ist es, auch rechenschwachen Kindern flexibles

Rechnen auf der Basis fundierter Zahl- und Operationsvorstellungen zu ermöglichen. Die Kinder erforschen an geeigneten Materialien strukturelle und operative Zusammenhänge zwischen Aufgabengruppen und zwar differenziert nach der individuellen Leistungsfähigkeit. Die heterogene Gruppe arbeitet also an strukturell analogen Aufgaben, allerdings in verschiedenen Zahlenräumen und Abstraktionsniveaus. Indem alle Kinder zuerst in Paar- und dann in Gruppenarbeit von ihren Erkenntnissen berichten und die Erkenntnisse der anderen nachvollziehen, wird die Bandbreite der Problemlösung für alle nutzbar. Dafür werden differenziert gestaltete Aufgabenformate genützt, die den Aufbau von *mathematischen* Konzepten unterstützen. Offene Aufgabenstellungen, bei denen die Kinder selbst analoge Aufgaben für andere entwerfen, können diagnostisch genutzt werden, und dienen dem lustvollen Absichern der Erkenntnis.

Während dieses Förderprogramm rechenschwachen Kindern hilft, grundlegende mathematische Konzepte zu bilden, hilft es starken Rechnern, die Sicht auf mathematische Strukturen zu vertiefen.

Das Programm besteht aus 20 Fördereinheiten, die lehrgangsbegleitend ab Mitte des 1. und zu Beginn des 2. Jahres verwendet werden. Es beinhaltet Unterrichtsleitfäden, didaktisches Hintergrundwissen und umfangreiche, erprobte Arbeitsmaterialien, die im Karteikartenformat auch als Download zur Verfügung stehen.

Automatisieren

Es gibt einen Zusammenhang zwischen erfolgreichem Automatisieren von einfachen Rechenaufgaben im Zehnerraum und der gefühlsmäßigen Grundhaltung (positiv oder negativ) sowie der Selbsteinschätzung in Mathematik. (Vgl. Moser Opitz 2007, S. 61 ff) Das Training kann gut anhand einer Lernkartei (Siehe S. 37) erfolgen. Beim Einlernen neuer Informationen sollte darauf geachtet werden, das Kind nicht mit zu vielen Rechnungen auf einmal zu überfordern. Ein nachhaltiges Einprägen weniger Informationen ist dem kurzzeitigen Behalten vieler Informationen vorzuziehen.

Bewusstes Erarbeiten von Ableitungstechniken

Ziel ist das Erarbeiten numerischer Netzwerke. Durch zählendes Rechnen können sich solche Netzwerke nicht bilden und somit, bei steigendem Schwierigkeitsgrad nicht genutzt werden. Ableitungsstrategien, wie zum Beispiel das Rechnen mit 5er Portionen oder mit Nachbaraufgaben können das Kind dabei unterstützen Rechnungen mit weniger Aufwand zu lösen.

Ableitungsstrategien (lt. Eckstein, 2013)

- Nachbaraufgabe (7 + 4 = 11, denn 7 + 3 = 10 und 10 + 1 = 11)
- Tauschaufgabe (7 + 4 = 11, denn 4 + 7 = 11)
- Schrittweises Rechnen (7 + 9 = 16, denn 7 + 9 = 7 + 3 + 6)
- Umkehraufgabe (10 − 3 = 7, denn 7 + 3 = 10)
- Zehneranalogie (17 − 4 = 13, denn 7 − 4 = 3)

Wichtig für die Förderung ist das Abstimmen der Methode auf die Fähigkeiten des Kindes. Ein Zuviel an Förderung kann sich als ebenso kontraproduktiv erweisen wie die falsche Methode. Eine Diagnostik der rechnerischen und kognitiven Fähigkeiten lohnt sich daher immer.

Verschiedene Ebenen der Förderung

Fördermöglichkeiten können auf verschiedenen Ebenen stattfinden. Hier wird auf die Schulebene, die Unterrichtsebene und spezifische Fördermethoden eingegangen.

Unterrichtsorganisatorische Möglichkeiten

»Betreuungslehrer für Mathematik«

Es besteht die Möglichkeit, engagierte Eltern (z. B.: ein Betreuungslehrer je Klasse) durch Lehrpersonen in der Anwendung von passenden Methoden auszubilden. In Kleingruppen kann nicht Verstandenes besser erklärt werden.

Schüler helfen Schülern

Schülerinnen und Schüler aus höheren Schulstufen können zu Mathe-Trainern ausgebildet werden und so rechenschwache Kinder aus niedrigeren Schulstufen helfen.

Unterrichtsspezifische Möglichkeiten

Freies Arbeiten

Freie Arbeitsaufträge oder Wochenpläne schaffen Raum für individuelle Betreuung. Durch das selbstständige Bearbeiten von Aufgaben hat die Lehrkraft die Möglichkeit, Fragen rechenschwacher Kinder ausführlicher zu beantworten.

Fördertisch

Kinder mit Schwierigkeiten in der Erfassung des Lernstoffes sammeln sich an einem Tisch. Die Lehrkraft kann so intensiver auf Fragen eingehen.

Experten (leistungsstarke Kinder helfen leistungsschwachen Kindern)

Bei der Diskussion mathematischer Probleme kann die paarweise Zusammenarbeit mit guten Rechnern den Lernprozess rechenschwacher Kinder unterstützen.

Sprachsensibler Unterricht

Bei Kindern mit anderer Muttersprache steht nicht nur die sachlich-fachliche Ebene im Vordergrund, sondern auch die sprachliche Förderung. Die Schüler können ihr Vorwissen besser abrufen, wenn sie die Lernziele kennen. Diese sollten deshalb zu Beginn des Förderunterrichts schriftlich festgehalten werden. Nach dem Unterricht kann gemeinsam reflektiert werden, ob das Kind das Lernziel verstanden hat. Eine separate Handreichung bietet differenzierte Informationen zum komplexen Thema des sprachsensiblen Unterrichts im Fach Mathematik:

Österreichisches Sprachen-Kompetenz-Zentrum (Hrsg.) (2014). Sprachsensibler Unterricht in der Grundschule – Fokus Mathematik. (ÖSZ Praxisreihe Heft 22). Graz: ÖSZ.

http://oesz.at/download/publikationen/Praxisreihe_22_FINAL_WEB.pdf

Fördermöglichkeiten in den verschiedenen Bundesländern

Die Fördermöglichkeiten können in jedem Bundesland und selbst in einzelnen Bezirken eines Bundeslandes sehr unterschiedlich organisiert sein. In einigen Regionen gibt es eine speziell ausgebildete Lehrkraft, die sich intensiv mit der Förderung rechenschwacher Kinder befasst oder die Lehrkräfte der betroffenen Kinder entsprechend schult. Da sich die Unterstützungsangebote im Laufe der Zeit ändern, sollten die aktuellen Fördermöglichkeiten bei der jeweiligen Leitung (Schulleitung, Schulaufsicht, Landesschulrat) erfragt werden. Weitere Fördermöglichkeiten finden Sie auch auf der Homepage der Schulpsychologie der einzelnen Bundesländer.

Einbeziehung der Eltern in der Lernförderung

Oft versuchen Eltern ihren Kindern Mathematik so zu vermitteln, wie sie es selbst in der Schule erlernt oder verstanden haben. Diese Strategie ist jedoch nicht immer sinnvoll. Es kann zu einer Kollision der Erklärungsmodelle der Eltern und den unterrichteten Modellen in der Schule kommen. Die Zusammenarbeit mit der Lehrperson wird daher unbedingt empfohlen, um das Kind nicht durch zu viele verschiedene Rechenstrategien zu verwirren.

Lernfördertipps für Eltern und Lehrpersonen

1. **Wissenslücken füllen**
   Bringen Sie in Erfahrung (ggf. durch Hinzuziehung eines Experten), wo genau die Defizite des Kindes liegen. Hat es die Zahlenzerlegung verstanden? Ist der Zehner-Übergang gefestigt? Sind Multiplikationen verinnerlicht? Sind die Rechenoperationen verstanden? Hierfür können Sie die beiliegende Checkliste oder eine detaillierte Lerndiagnostik heranziehen.

2. **Nicht zu viele verschiedene Methoden**
   Die Verwendung vieler verschiedener Veranschaulichungsmethoden birgt die Gefahr, dass die Methoden nicht ausreichend gefestigt sind und dann auf zählende Rechenstrategien zurückgegriffen wird. Die Veranschaulichungsmethode soll jedoch die mathematische Struktur verdeutlichen.

3. **Kleine Einheiten einüben**
   Viele verschiedene oder aufeinander aufbauende Informationen können schwer behalten werden. Es ist daher sinnvoll, neue Inhalte nur in kleinen Portionen zu vermitteln, da diese dann wesentlich prägnanter im Gedächtnis bleiben. Dies erzeugt wiederum Erfolgsgefühle und steigert die Motivation.

4. **Kurze Wiederholungen über den Tag verteilt**
   Durch tägliche kurze Übungseinheiten kann das betroffene Kind seine Konzentration und Motivation leichter aufrecht erhalten. Kleine Lerneinheiten, die dem automatisierenden Lernen dienen, können auch besser in den Alltag integriert werden. Zum Beispiel: vor dem Mittag- oder Abendessen, vor dem zu Bett gehen oder vor dem Fernsehen.

5. **Nicht zu schnell mit dem Stoff voranschreiten**
   Manchmal werden neue Lerninhalte in der Schule nicht so lange eingeübt, wie es für ein dauerhaftes Merken notwendig wäre. Elementare Rechenprozeduren sollen daher länger (4 bis 8 Wochen) und in kleinen Portionen wiederholt werden.

6. **Kaum gelernt, schon vergessen**
   Es kommt vor, dass Rechenwege, welche einmal verstanden wurden, nicht dauerhaft behalten werden. Um ein verstandenes Stoffgebiet zu automatisieren, sollte es mehrmals wiederholt werden. Vor allem in den Ferien sind zu lange lernfreie Phasen nachteilig für die Automatisierung von Wissen.

7. **Lernkärtchen**
   Das Üben mit Lernkärtchen ist eine leicht anwendbare und sehr effektive Methode, um Wissen zu automatisieren. Auf einer Seite steht die Rechnung, auf der anderen Seite die Lösung. Bei Nicht-Wissen innerhalb einer Sekunde soll die Karte umgedreht werden um inadäquate Rechenstrategien, wie z. B.: zählendes Rechnen zu vermeiden. Je häufiger die Durchgänge stattfinden, desto leichter fällt das schnelle Abrufen der Information. Das gemeinsame Arbeiten mit dem Kind wirkt sich zusätzlich motivationsfördernd aus.

8. **Konsequentes Einhalten der Lernstruktur**
   Um ein nachhaltiges Einprägen beim Automatisieren zu fördern ist es wichtig, das Kind bei der konsequenten Einhaltung der Lernstruktur zu unterstützen. Selbstständiges Üben fällt den meisten Kindern sehr schwer, vor allem, wenn eine Lernschwäche vorliegt. Für eine Verbesserung der Rechenleistung ist es notwendig, dass das Kind von den Eltern durchgehend unterstützt wird.

9. **Vereinbarungen im Voraus treffen**
   Um starke Abwehrreaktionen gegen das Üben zu vermeiden, hat es sich als hilfreich erwiesen, gemeinsam mit dem Kind Lernvereinbarungen zu treffen. Das Kind sollte in die Entscheidungen mit einbezogen werden. Dies erhöht die Bereitschaft mitzumachen und fördert die Motivation. Die täglichen Übungseinheiten sollten zeitlich transparent und überschaubar sein und nicht variieren.

10. **Emotionale Bewertung**
    Lernen und Lernprozesse sind mit positiven oder negativen Gefühlen gekoppelt. Dies wirkt sich auf die Verarbeitungsprozesse der Lerninhalte aus. Es ist daher sinnvoll, positive Gefühle beim Lernen zu erzeugen. Dies gelingt am ehesten durch das zeitnahe Sichtbarmachen von Erfolgen. Ermutigen Sie Ihr Kind, wenn ihm eine Rechnung gelingt.

11. **Realistische Zielsetzung**
    Wenn man ein rechenschwaches Kind fördert, muss man sich darüber im Klaren sein, dass der Weg lang ist. Die Erwartung von einer negativen Note auf eine 2 zu springen ist meist sehr unrealistisch und kann sich entmutigend auf das Kind auswirken. Es sollten daher erreichbare Ziele gesetzt werden.
    (vgl. Born & Oehler, 2011)

Schuleingangsphase

CLAUDIA NEUNER-HEISS

Risikofaktoren für die Entwicklung einer Schwäche beim Rechnenlernen können bereits frühzeitig beobachtet werden. Je früher eine adäquate Förderung stattfindet, desto größer sind die Chancen, dass das betroffene Kind Erfolge erzielt und umso weniger sind negative schulische Konsequenzen zu erwarten.

Der Fokus in diesem Kapitel liegt auf der individuellen Beobachtung mathematischer Vorläuferfähigkeiten in der Schuleingangsphase, der Prävention von Schwächen beim Rechnenlernen und entsprechenden Interventionen.

Folgend wird eine Checkliste dargestellt, welche die Beobachtung der spezifischen mathematischen Vorläuferfähigkeiten (mengenbezogenes Vorwissen, zahlbezogenes Vorwissen) erleichtern soll, um damit die Basis zu schaffen, Kinder von Schulbeginn an bestmöglich zu fördern. Für die Anwendung der Checkliste sind einige Materialien erforderlich, die man sich selbst besorgen bzw. selbst erstellen kann.

Checkliste für die Schuleingangsphase

Mengenbezogenes Vorwissen **Kann das Kind …**	✓
… sagen, wie viel von einer bestimmten Sache vorhanden ist? (Klassifizieren; z. B. Gruppenzugehörigkeit: 3 Äpfel, 3 Birnen)	
… ungeordnete Mengen von 4 (Punkte auf Karte, Spielsteine …) sicher erkennen, wenn sie nur kurz (ca. 1 Sekunde) gezeigt werden und die Augenzahl beim Würfeln spontan benennen? (Simultane Mengenerfassung) Oder muss das Kind jedes Mal wieder von 1 weg zu zählen beginnen?	
… Mengen nach Größe bzw. bestimmten Merkmalen ordnen? (Seriation; z. B. 5–7 Gegenstände vom Kleinsten bis zum Größten ordnen)	
… die Begriffe »mehr«, »weniger« und »gleich viel« unterscheiden? (anhand von konkretem Material)	
… einem Element der ersten Menge jeweils ein Element der zweiten Menge zuordnen und so die beiden Mengen ohne zu zählen vergleichen? (Operieren mit 1:1 Zuordnungen) ▪ Überprüfung anhand konkreter Objekte. □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ Fragen Sie das Kind, in welcher Reihe mehr Steine sind.	

Zahlbezogenes Vorwissen **Kann das Kind …**	✓
… Zahlwörter verwenden (z. B. drei Häuser, fünf Autos …)?	
… sicher (ab-)zählen? (Zählfertigkeit) ▪ allgemein schon zählen? ▪ von 5 rückwärts zählen? ▪ z. B. von 6 beginnend weiterzählen? ▪ die vorausgehende oder nachfolgende Zahl benennen, z. B. welche Zahl kommt vor / nach 4? ▪ aus zwei vorgegebenen einstelligen Zahlen die größere / kleinere Zahl angeben? ▪ Objekte, Bewegungen und Rhythmen abzählen (z. B. beim eigenen Gehen die Schritte zählen)? ▪ erkennen, dass die Zählrichtung (von rechts nach links bzw. links nach rechts) für das Ergebnis ohne Bedeutung ist? □ □ □ □ □ □ □ □ Man lässt das Kind zunächst die Steine abzählen, danach wird es gefragt: »Wenn du jetzt hier (auf der anderen Seite) zu zählen beginnst, was glaubst du, wie viele sind es?«	
… Ziffern erkennen und diese akustisch vorgegebenen Zahlen zuordnen? (Arabisches Zahlenwissen)	
… einfache Rechnungen – z. B. Aufteilen, Dazugeben, Wegnehmen bewältigen? (Alltagsmathematik mit konkretem Material) ▪ 6 Würfel auf 2 bzw. 3 Kinder gleichmäßig aufteilen ▪ z. B. folgende Aufgabe lösen: »Stell dir vor, du hast drei Bücher und holst dir danach noch zwei. Wie viele hast du dann?«	

Falls ein Kind in mehreren Bereichen Unsicherheiten aufweist, sollten gezielte Fördermaßnahmen überlegt werden, bevor mit dem formalen Rechnen begonnen wird.

Prävention und Intervention in der Schuleingangsphase

Hier sollen Bausteine der Förderung mathematischen Denkens beschrieben werden, die entsprechend der individuellen Lernvoraussetzungen des jeweiligen Kindes herangezogen werden können, um den Erwerb mathematischer Kompetenzen zu forcieren (vgl. Gaidoschik, 2002; Krajewski, 2005; Lorenz, 2005).

Förderung des mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens

Ein präventives Fördern der spezifischen mathematischen Vorläuferfähigkeiten, des mengen- und zahlenbezogenen Vorwissens (vgl. Checkliste für die Schuleingangsphase), kann Kinder mit individuellen Schwächen beim Rechnenlernen unterstützen. In den ersten Schulwochen soll neben der Förderung der Zählkompetenzen besonderes Augenmerk darauf liegen, die Zahlen in Beziehung zu ihren Zahlennachbarn und als Zusammensetzung zu erfassen. Dieses Zahlenverständnis ist die Basis für das Rechnenlernen. Die einzelnen notwendigen Schritte werden in den folgenden Unterpunkten erläutert.

Absichern der Eins-zu-eins-Zuordnung sowie der quantitativen Grundbegriffe »gleich viel«, »mehr« und »weniger«

Manchen Kindern ist zum Schuleintritt nicht klar, dass »mehr«, »weniger« und »gleich viel« Relationen darstellen und keine Eigenschaften der Dinge sind. Diesen Kindern ist auch unklar, dass, wenn eine Menge »mehr« ist, die Vergleichsmenge »weniger« sein muss. Die Frage, um wie viel mehr die eine Menge als die andere ist, stellt für sehr viele Kinder beim Schuleintritt eine große Herausforderung dar (Relationalzahl). Diese Fähigkeit ist mit dem Spiel »Hamstern«[14] sehr gut zu fördern.

Erarbeitung des Zahlverständnisses

Jede Zahl soll als »Wie viel?« (Menge/Kardinalzahl) und als »der Wievielte« (Rangplatz/Ordinalzahl) verstanden werden und in Beziehung zu den anderen Zahlen gesetzt werden können (z. B. »6« ist um 1 mehr als 5, um 1 weniger als 7; kann in 1+5, 2+4, 3+3 zerlegt werden; ist um 4 weniger als 10; ist doppelt so viel wie 3).

Deswegen wird für den Unterricht angeregt, dass Kinder zunächst ungeordnete Mengen so ordnen sollen, dass die Teilmengen simultan (»mit einem Blick«) erfasst werden können. Das soll zur »strukturierten Zahlauffassung« führen.

Wichtig ist es ebenso, das Gefühl der Kinder für Zahlen und Mengen zu stärken (z. B. Schätzaufgaben, überschlagendes Rechnen).

Aufbau eines »Fingerbildes« der Zahlen bis 10

Als ein erster Schritt wird das Fingerbild der Zahl 5 (= alle Finger an einer Hand) bearbeitet. Im zweiten Schritt die Zahl 10 (= alle Finger an beiden Händen zusammen).

Ziel ist es, den tatsächlichen Einsatz der Finger bzw. Hände durch die Vorstellung der Finger bzw. Hände überflüssig zu machen.

---

14 http://pikas.dzlm.de/material-pik/themenbezogene-individualisierung/haus-6-unterrichts-material/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-unterrichtsbeispiele.html#Hamstern

Die Kinder können lernen, dass sie z. B. die Zahl zehn teilen können in zweimal fünf. Wenn sie dieses Wissen internalisiert haben, erleichtert das die weiteren Rechenschritte.

Allgemeines zum Materialeinsatz: Erarbeitungsmaterial als »Leiter« statt als »Krücke«

Positive Effekte konnten bei der spezifischen Förderung mathematischer Kompetenzen anhand visueller Anschauungshilfen festgestellt werden, weil so das Arbeitsgedächtnis entlastet werden kann und Kinder beim Operieren mit Mengen konkrete Hilfsmittel in die Hand bekommen. Darauf können später abstrakte Vorstellungen von den Zahlen und Rechenoperationen aufgebaut werden (Krajewski, 2005).

Das Material soll nicht auf Dauer als Abzählhilfe verwendet, sondern durch geeignete Fragestellungen und Denkanstöße zur Lösung von Aufgaben herangezogen werden. Das erfordert oft einen zweiten Schritt nach dem Zählen (»Woran kannst du jetzt ohne zu zählen erkennen, dass es 7 Punkte im Zwanzigerfeld sind?«).

Ein Hin- und Herwechseln zwischen verschiedenen Materialien und unterschiedlichen, bunten Darstellungen soll vermieden werden, weil die Kinder die Materialien jeweils lernen müssen und eine methodische Vielfalt zu Verwirrung und Überforderung führen kann.

Für den Anfangsunterricht werden vorwiegend strukturierte Materialien empfohlen, dabei vor allem solche, die die »Kraft der Fünf« betonen (z. B. Zwanzigerfeld, Abakus).

Das Ziel ist es, auf das Material auch wieder verzichten zu können. Sollten Kinder die Materialien zum (heimlich) zählen verwenden, ist es nicht sinnvoll das Abzählen zu verbieten, sondern am Aufbau strukturierter Zahlen zu arbeiten (»Aus welchen Zahlen besteht 7?«).

Aufbau von Zahlwissen und Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch »vergleichendes Rechnen«

Weiters sollen der Aufbau eines gegliederten Zahl-Wissens (z. B. »6« besteht aus 4+2- folgt 6-4=2), sowie das Auswendigmerken von Zahlverknüpfungen (z. B. 3+3=6, 3+4=7…) gefestigt werden (mögliche Frage: »Vergleiche die Aufgaben hier und dort. Was macht den Unterschied aus?«)

Zahlenzerlegen durch Einsicht in die Zerlegungs-Handlung

Bei »7« sollte »1+6«, »2+5«, »3+4« … selbstverständlich mitgedacht werden (z. B. mithilfe einer Kugelkette – für jede Zahl eine eigene Kette). Auf symbolischer Ebene kann hier mit Zahlenhäusern gearbeitet werden.

Gezieltes »Automatisieren«

Wenn ein Kind in der Lage ist, Zahlen gegliedert zu denken und vergleichend zu rechnen, kann systematisch geübt werden. Dazu müssen Kinder unterscheiden lernen, was beim Rechnen »einfache« Aufgaben[15] sind. Für nicht zählende Rechner sind ±1, ±5, ±10, Verdoppelungen und die Partneraufgaben (zusammen 10) leichte Aufgaben. Diese sollen zuerst automatisiert sein, weil man dann beim Ableiten auf diese zurückgreifen kann. Die Ableitestrategien umfassen Nachbaraufgaben, Tauschaufgaben und Umkehraufgaben des schon Automatisierten. Durch diese Vernetzung entstehen ein Kosmos von zusammenhängenden Rechnungen und ein strukturierter Zahlenraum.

---

15 Für zählende Kinder sind Rechnungen dann einfach, wenn wenig zu zählen ist.

Der Übergang von einer Abzähl- zu einer Abrufstrategie findet bei Kindern zu unterschiedlichen Zeitpunkten statt. Das Üben und Automatisieren kann dem Kind helfen, schneller zu einer Lösung zu kommen, jedoch ist es wichtig gleichzeitig Verständnis für Zahlen und Mengen zu forcieren, um auch langfristig das Rechnenlernen zu erleichtern.

Aktiv-entdeckendes Lernen (vgl. Wittmann & Müller, 1994)

Durch eigenes mathematisches Tun können Kinder Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten selbst entdecken. Individuelle Lösungswege und Strategien sollen diskutiert werden. Dabei werden (Denk-)Fehler als Chance gesehen, um neue Wege auszuprobieren. Ein Verständnis und ein Begreifen mathematischer Strukturen und Gesetzmäßigkeiten soll unterstützt werden, damit die Kinder eine Basis haben, um den weiteren rechnerischen Anforderungen gerecht zu werden. Das Einüben unverstandener Regeln sowie das ständige, zählende Hantieren sollen tunlichst verhindert werden.

Nachfragen

Um das jeweilige Kind individuell und differenziert fördern zu können, ist es essentiell, dass man herausfindet, wie das Kind denkt und was es bis jetzt verstanden hat. Im Unterricht ist häufiges Nachfragen zu empfehlen (»Wie hast du hier gerechnet?«, »Wie bist du zu diesem Ergebnis gekommen?«), um zu erfahren, welche Rechenstrategien gerade angewendet werden. Wichtig ist das häufige Reflektieren der Kinder über Rechenaufgaben (»Warum ist das so?«, »Wie hängt das mit schon Bekanntem zusammen?«) und die Kommunikation der Kinder untereinander und mit der Lehrkraft. Dabei können die Kinder Denkfehler korrigieren und von der zählenden Zahlverwendung hin zu effizienteren Rechenstrategien, zum Erkennen, Verstehen und Nutzen von operativen Zusammenhängen kommen.

Grundstufe I und II

AMINA RASCHID UND BIRGIT DÜNSER

Beobachtungsbogen Grundstufe I

Um eine Rechenschwäche frühzeitig erkennen zu können, sollten nicht nur die Resultate beim Rechnen beachtet werden. Wichtig ist vor allem zu beobachten, wie die Ergebnisse erzielt werden (vgl. Gaidoschik, 2002). Dies ist vor allem in Einzelsituationen möglich.

Die unten angeführten Punkte stellen eine Hilfestellung dar, um gezielt zu erfassen, in welchen mathematischen Teilbereichen Unsicherheiten vorhanden sind.

Die folgenden Aufgabenstellungen gelten für das Ende der 1. Schulstufe bzw. Ende der 2. Schulstufe. Die Beobachtung kann aber auch zu einem anderen Zeitpunkt erfolgen, indem man die Rechenbeispiele an die aktuelle Lernzielvorgabe anpasst.

Bitte markieren Sie die Inhalte, die das Kind bereits versteht bzw. lösen kann, mit einem Haken:

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe I)		
	1. Schulstufe	
1.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 30 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es z. B. von 14 beginnend weiterzählen?	
	c) Kann das Kind Fragen wie die folgende beantworten, ohne vorher nachzuzählen? Welche Zahl kommt nach / vor der 6?	
	d) Kann das Kind die Zehnerzahlen bis 100 nennen?	
2.	**Anwendung von Operationen**	
	a) Kann das Kind Plus und Minus im erlernten Zahlenraum sicher anwenden? Lassen Sie sich den Rechenvorgang vom Kind erklären. Welche Strategien fallen auf? (z. B. zählendes Rechnen) Wie löst das Kind folgende Aufgaben?	
	b) Tauschaufgaben Beispiel: 8 + 1 = 9 1 + 8 = 9 Kann das Kind die 1. Aufgabe zur Lösung der 2. nützen? Welche Begründung gibt das Kind?	
	c) Verständnis von Rechenkonzepten (Zusammenhang zwischen Plus / Minus) Beispiel: 3 + 3 = 6 6 – 3 = 3 Kann das Kind die 1. Aufgabe zur Lösung der 2. nützen? Welche Begründung gibt das Kind?	
	d) Platzhalter: 3 + ___ = 7	
	e) Zehnerüberschreitung: 7 + 6 = ?	
3.	**Prinzipien Aufteilen, Dazugeben und Wegnehmen** Können folgende Aufgaben gelöst werden?	
	a) 9 Bälle auf 3 Kinder gleichmäßig aufteilen	
	b) »Stell dir vor, du hast fünf Bücher und holst dir danach noch zwei. Wie viele Bücher hast du dann?«	
	2. Schulstufe	
4.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 100 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es in Zweierschritten, Fünferschritten, Zehnerschritten von beliebigen Ausgangszahlen vorwärts und rückwärts zählen?	
5.	**Zahlencodierung**	
	Liest bzw. schreibt es die Zahlen im Zahlenraum 100 richtig ohne sie zu vertauschen oder die Schreibrichtung zu ändern? (z. B. 38 statt 83)	

6.	**Orientierung im Zahlenraum 100**	
	a) Wird eine Zahl auf einem Zahlenstrahl / einem Maßband gefunden?	
	b) Kann das Kind Größenvergleiche zwischen zweistelligen Zahlen machen? Beispiel: »Wo steht die höhere Zahl?« 39 oder 41 Woran erkennst du das?	
	c) Kann es beurteilen, zwischen welchen Zehnerzahlen eine Zahl liegt?	
7.	**Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 100**	
	a) Kann das Kind folgende oder ähnliche Rechnungen sicher lösen? 74 + 15 = ? 88 – 12 = ?	
	b) Kann das Kind Rechnungen mit Zehnerüberschreitung bzw. Zehnerunterschreitung lösen? Beispiele: 47 + 16 = ? 54 – 27 = ?	
	c) Kommt es zur richtigen Lösung, ohne zu zählen bzw. »Zählmaterial« zu verwenden?	
8.	**Multiplizieren**	
	a) Versteht das Kind das Multiplizieren als ein Vervielfachen?	
	b) Wie interpretiert das Kind Multiplikationen mit Material (z. B. die Rechnung 3 × 4)?	
	c) Versteht das Kind Zusammenhänge zwischen den Multiplikationen? z. B. 5 × 5 ist die Hälfte von 5 × 10 z. B. 9 × 3 ist um einen Dreier weniger als 10 × 3	
9.	**Verständnis von Sachaufgaben**	
	a) Kann das Kind Sachaufgaben in eigenen Worten wiedergeben? b) Kann das Kind Sachaufgaben mit Material, einer Skizze oder szenisch verdeutlichen? c) Kann das Kind Sachaufgaben aus einem Term konstruieren? d) Kann das Kind aus einer Materialsituation eine passende Sachaufgabe erfinden?	

Anmerkung: Die Auffälligkeiten, die für die erste Schulstufe beschrieben werden, können auch noch in höheren Schulstufen unverändert oder in einer abgewandelten Form fortbestehen. Falls ein Kind in mehreren Bereichen Unsicherheiten aufweist, sollte zusätzlich noch die Checkliste für die Schuleingangsphase herangezogen und gezielte Fördermaßnahmen überlegt werden.

Fallbeispiel Grundstufe I

Max (7; 3 Jahre), Ende 1. Schulstufe, wird wegen Schwierigkeiten im Rechnen zur schulpsychologischen Beratung angemeldet. Bei der Untersuchung zeigt sich, dass Max nur mit Hilfe der Finger Rechenaufgaben lösen kann. So löst er Aufgaben wie 3 + 4 = 7, indem er mit der linken Hand 3 Finger zeigt und mit der rechten Hand 4 Finger und diese dann zusammenzählt. Rechnungen über den 10er hinaus versucht er auf die gleiche Weise zu lösen, dabei unterlaufen ihm jedoch Zählfehler oder er vergisst, an welcher Stelle er mit dem Zählen begonnen hat. »Klassische« Fingerbilder kann er erkennen (z. B. 5 Finger der linken Hand und 1 der Rechten sind 6), werden diese jedoch variiert (3 Finger links und 3 rechts) muss er sie zusammenzählen.

1. Max ist noch vollkommen im zählenden Rechnen verhaftet. Bei ihm liegt ein einseitiges »ordinales« Zahlenverständnis vor. Er bestimmt somit nur den Rangplatz einer Zahl, das Verständnis, dass Zahlen aus einer Anzahl von Dingen (Kardinalaspekt z.B. 4 = 1 + 1 + 1 + 1) bestehen, ist bei ihm nicht verankert. Mengeninvarianz kann er hingegen erkennen (d.h. er erkennt zwei gleich große Mengen ohne sie abzuzählen). Ziel der Förderung muss sein, Max von der zählenden Strategie zum begreifenden Erkennen von Mengen hinzuführen. Es muss somit der »kardinale« Aspekt einer Zahl erarbeitet werden. Begonnen wird im Zahlenraum bis 10.
2. Dies soll durch den Aufbau eines »inneren Fingerbildes« unterstützt werden. Diese Fingerbilder werden mit Max zuerst aktiv erarbeitet. Im ersten Schritt lernt Max mit der Zahl 5 die Vorstellung »alle Finger an einer Hand« zu verknüpfen und mit der Zahl 10 »alle Finger an beiden Händen«. Dies wird dann mit anderen Zahlen erarbeitet z.B. 3 – eine Hand genügt, zwei Finger werden nicht gebraucht oder die Zahl 7 – 5 Finger auf der einen, 2 auf der anderen: 3 Finger werden nicht gebraucht. Dabei ist zu beachten, dass Max nicht in der Zählhandlung verbleibt, sondern die Zahl (wie beschrieben anhand seiner »Handpakete«) in Worte fasst. Der nächste Schritt besteht nun darin, die Zahl mit den Fingern zu zeigen – jedoch verdeckt unter einem Tuch. Dann muss Max verbalisieren, wie viele Finger er an den einzelnen Händen ausgestreckt hält und wie viele nicht »gebraucht« werden. So wird der tatsächliche Einsatz der Finger und Hände immer mehr durch die Mengenvorstellung ersetzt.
3. Ausgehend von den eingeübten imaginierten Fingerbildern werden mit Max nun Rechenaufgaben erarbeitet. Die Zerlegungen der Zahl führen zu Addition, Subtraktion und Ergänzungen. Da zählende Rechner große Schwierigkeiten haben »einfache« von »schwierigen« Rechnungen zu unterscheiden, werden zunächst die »einfachen« Handlungen automatisiert. Dabei setzt Max seine »imaginierten Hände« als Bezugspunkte für die Zahlen 5 (eine ganze Hand) und 10 (beide Hände zusammen) ein. Von diesen ersten Automatisierungen werden dann die Tausch-, Nachbar- und Umkehraufgaben abgeleitet.
4. In Abstimmung von Übungseinheiten in der Schule und auch Zuhause (ca. 10 min am Tag), zeigt sich nach 10 Wochen eine deutliche Verbesserung. Max hat schon viele Rechnungen im Zahlenraum bis 10 automatisiert und deren Zusammenhang verstanden. Er hat deutlich mehr Spaß am Rechnen und auch an Selbstsicherheit gewonnen.

Beobachtungsbogen Grundstufe II

Die folgenden Aufgabenstellungen sollten am Ende der 3. Schulstufe beherrscht werden. Die Beobachtung kann aber auch früher oder später erfolgen, indem man die Rechenbeispiele an die aktuelle Lernzielvorgabe anpasst.

Bitte markieren Sie die Inhalte, die das Kind bereits versteht bzw. lösen kann, mit einem Haken:

Beobachtungsbogen für LehrerInnen (Grundstufe II)		
1.	**Zählen**	
	a) Kann das Kind im Zahlenraum 1000 sicher vorwärts und rückwärts zählen?	
	b) Kann es in Zweierschritten, Fünferschritten, Zehnerschritten von beliebigen Ausgangszahlen vorwärts und rückwärts zählen?	

2.	**Orientierung im Zahlenraum**	
	a) Wird eine Zahl auf einem Zahlenstrahl / einem Maßband gefunden?	
	b) Kann das Kind Größenvergleiche zwischen dreistelligen Zahlen machen? *Beispiel:* »Wo steht die höhere Zahl?« 189 oder 198 Woran erkennst du das?	
3.	**Stellenwertsystem**	
	a) Liest bzw. schreibt das Kind die Zahlen im Zahlenraum 1000 richtig? Beispiel: »Schreib die Zahl 324!« (Mögliche Fehler: 30024, 342)	
	b) Kann das Kind folgende oder ähnliche Beispiele richtig lösen? 200 + 60 = ? (Möglicher Fehler: 800) 700 – 30 = ? (Möglicher Fehler: 400) 370 + 160 = ? (Möglicher Fehler: 413 → 3 + 1 = 4, 7 + 6 = 13)	
4.	**Über- bzw. Unterschreitungen im Zahlenraum 1000**	
	a) Kann das Kind folgende oder ähnliche Beispiele richtig lösen? 499 + 1 = ? (Möglicher Fehler: 599) 400 – 1 = ? (Möglicher Fehler: 300)	
	b) Kommt es zur richtigen Lösung, ohne zu zählen bzw. »Zählmaterial« zu verwenden? (z. B. Finger, »inneres Zählen«)	
5.	**Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum 1000**	
	a) Können *halbschriftliche* Rechnungen sicher und ohne zu zählen gelöst werden? z. B.: 328 + 217 = ? z. B.: 560 – 148 = ?	
	b) Kann das Kind nachvollziehbar machen, wie es rechnet? (z. B. auf dem Rechenstrich)	
	c) Können *schriftliche* Additionen und Subtraktionen sicher gelöst werden? Mögliche Fehler: Verwechslung mit Additionen, »Kippfehler« → z. B. 54 – 27 = 33 → Das Kind rechnet 5 – 2 = 3 und 7 – 4 = 3	
6.	**Multiplizieren und Dividieren als besondere Fehlerquelle**	
	a) Beherrscht das Kind das schriftliche Multiplizieren sicher? Mögliche Fehler: Schwierigkeiten beim Einmaleins, Vergessen des »Übertrags«, Probleme mit der 0 (z. B. 3 × 0 = 3)	
	b) Kann das Kind Rechnungen mit einstelligem Divisor lösen?	
7.	**Rechenprozeduren**	
	Versteht das Kind die Prinzipien Dazugeben, Wegnehmen, Vervielfachen und Aufteilen? Hat es die Sachinhalte der Grundrechnungsarten verstanden? Beispiele: »Zeige mir, wie du 3 × 5 = 15 mit Material auflegst.« »Zeige mir, wie du 20 : 4 = 5 mit Material auflegst.«	
8.	**Maßeinheiten**	
	a) Ist ein Modellverständnis der Maßeinheiten vorhanden? – Umrechnung Geldmaße, Zeitmaße, Längenmaße, Massenmaße	
	b) Kann das Kind Größen realistisch einschätzen? Z. B. die Länge eines Klassenzimmers.	

9.	**Sachaufgaben**	
	a) Weiß das Kind die Grundrechenarten in den Sachaufgaben richtig anzuwenden?	
	b) Zeigt es eine planvolle und überlegte Herangehensweise?	

Fallbeispiel Grundstufe II

Leonie (10; 4 Jahre), Schülerin der vierten Schulstufe, wird zum Halbjahr des Schuljahres aufgrund von Rechenschwierigkeiten beim Schulpsychologischen Dienst vorgestellt. Es zeigt sich, dass das Mädchen die Grundrechenarten größtenteils beherrscht, solange sie nur mechanisch anzuwenden sind. Es sind Defizite im mathematischen Vorstellungsvermögen sowie Verständnisschwierigkeiten bei Textaufgaben sichtbar, wo sie überwiegend die Addition zur Lösung anwendet.

So rechnet Leonie bei der Aufgabe: »Ein Lederball kostet 26 €, wie viel kosten 4 Bälle?« sofort: 26 + 4 = 30 €. Auf die Bitte der Schulpsychologin noch einmal nachzurechnen, erzielt sie dasselbe Ergebnis. Ähnliche Strategien zeigt sie auch bei den übrigen Textaufgaben.

Es wird ebenso evident, dass die Schülerin noch nicht über ein stabiles Stellenwertverständnis verfügt. Sie kann die Wertigkeit von Einer, Zehner, Hunderter sowie 0 als Platzhalter noch nicht richtig einschätzen. So errechnet sie bei der Vorgabe von drei Hundertern und fünf Einern die Zahl 35.

1. Das erste Ziel ist ein Operationsverständnis der vier Grundrechenarten. Was passiert beim Dazuzählen, Wegnehmen, Vervielfachen und Teilen? Gleichzeitig wird eine Verbesserung der Orientierung im Zahlenraum angestrebt.
2. Ausgehend von Leonies Vorliebe für Flohmärkte werden vor allem mathematische Geschichten erfunden, die von Spielsachen, Büchern etc. und deren Geldbeträgen handeln, die sie – anknüpfend an ihre Erfahrung – auch lösen kann. Sie wird dann aufgefordert die Aufgaben anhand von Zeichnungen oder Material zu visualisieren, um sie anschließend zu vergleichen und zu überprüfen. Hier wird auch das Verständnis für den Wertgehalt von Zahlen geübt. Wenn ihr das gelingt, können Textaufgaben bearbeitet werden, indem der Schülerin ein planvolles Vorgehen gezeigt und mit ihr eingeübt wird.
3. Nach ca. sechs Wochen intensiven Übens und Förderunterrichts werden bereits Fortschritte bei Leonie erkennbar. Sie konnte erfolgreich die Herangehensweise an die Aufgabe verändern sowie ein Operationsverständnis für die Grundrechenarten entwickeln. Sie lässt sich jetzt mehr Zeit zum Überlegen und nimmt bei Bedarf Material und Skizzen zu Hilfe, um sich dann für eine Rechenoperation zu entscheiden.

Diagnostik, Tests und gute Schulbücher

PAULE DUSSELDORF

Diagnostik

Sinn und Zweck einer genauen Diagnostik ist es, festzustellen, wo die Probleme der Kinder beim Rechnenlernen genau liegen und welche Hilfestellungen und Fördermaßnahmen ein Kind benötigt, um die Entwicklung des mathematischen Denkens angemessen voranzutreiben. Zur pädagogischen Diagnostik durch die Lehrperson kommt bei Bedarf eine psychologische Diagnostik durch die Schulpsychologie hinzu.

Die Lehrperson erhebt zunächst, über welche Kompetenzen das Kind gemessen an den Lernzielen der jeweiligen Schulstufe bereits verfügt. Eine detaillierte Abklärung der basisnumerischen und rechnerischen Leistungen ist dabei ausschlaggebend. Wichtig dabei ist es zu verstehen, wie das Kind zu seinem Ergebnis kommt. Es macht den entscheidenden Unterschied, ob das richtige Resultat durch Zählen oder durch »echtes« Rechnen zustande kommt. Anzumerken ist, dass rechenschwache Kinder über eine Fülle von angeeigneten Kompensationsstrategien verfügen können, mit deren Hilfe sie bei an sie gestellten Aufgaben möglicherweise durchaus zum richtigen Ergebnis kommen. So kann es der Fall sein, dass richtige Ergebnisse durch nicht zukunftsfähige Rechenkonzepte erreicht werden. Daher ist es für die Diagnostik unbedingt notwendig, nicht nur die Ergebnisse zu bewerten (»richtig«, »falsch«, »fast richtig«), sondern die Vorstellungen und Tätigkeiten des Kindes beim Rechnen zu beachten. So ist es sehr hilfreich, die Kinder schon im Unterricht zu ermuntern, über ihre Lösungswege nachzudenken und diese zu kommunizieren. »Die kindlichen Leistungen sollten nicht allein im Vergleich zu den anderen Kindern gesehen werden, sondern vor dem Hintergrund des Spektrums an mathematischen Lösungsmöglichkeiten, Denkweisen und auch Entwicklungsprozessen« (Häsel-Weide, 2014, S. 26). Nicht alle Aufgabenformate sind dazu geeignet. Diese sollten möglich machen, dass die Kinder ihre Ideen schriftlich festhalten, ihre Erkenntnisse mithilfe von Zeichnungen oder Materialien darstellen und ihre gewonnenen Erkenntnisse in Form von Eigen- und Koproduktionen anwenden können (vgl. Häsel-Weide, 2014). Kinder, die das aus dem Unterricht gewohnt sind, haben meist keine Probleme mit dem wichtigsten Diagnoseinstrument, der »Methode des lauten Denkens«. Diese ist am besten in einer Einzelsituation möglich.

Kann das Kind eine Aufgabengruppe nicht lösen, sollten zwei Dinge geschehen:

- Erstens sollte man feststellen, wie das Kind mit Hilfe von Anschauungsmaterial die Aufgabe erklären kann.
- Zweitens sollte man erheben, welche leichteren Aufgaben das Kind ohne Material selbstständig bewältigen kann: d. h. bis zu welchem Entwicklungsschritt das Kind gelangt ist und was das Kind nicht mehr versteht.

Im Rahmen der Diagnostik ist es wichtig, eine entspannte und angstfreie Situation für das Kind zu schaffen und sich mit Geduld und Neugierde auf den Rechenweg des Kindes einzulassen.

Dieser diagnostische Prozess kann von speziell geschulten Fachkräften (Schulpsychologinnen und Schulpsychologen, geschulten Lehrkräften, Dyskalkulietherapeuten und Dyskalkulietherapeutinnen) durch spezifische Testverfahren unterstützt werden. *Siehe S. 54ff*

Wann ist eine psychologische Abklärung der Rechenschwäche sinnvoll?

Bleiben bei der pädagogischen Diagnostik Fragen offen, sollte eine weiterführende *psychologische Abklärung* erfolgen. Dies ist dann der Fall, wenn neben den Schwierigkeiten im Rechnenlernen ein allgemeines Begabungsdefizit vermutet wird, sozial-emotionale Auffälligkeiten hinzukommen (z. B. Prüfungsangst, depressive Verstimmungen, Motivationsschwierigkeiten, Krisen, familiäre Belastungen), bei Lernproblemen in mehreren Gegenständen, Schwierigkeiten bezüglich Konzentration und Selbststeuerung, oder auch wenn die Übungsfortschritte bei einem rechenschwachen Kind unerwartet gering sind. Die psychologische Dyskalkulie-Diagnostik sollte daher nicht nur die Abklärung des basisnumerischen und rechnerischen Entwicklungsstandes beinhalten, sondern es sollen je nach Fall zusätzlich noch folgende Faktoren abgeklärt werden:

- Sprachentwicklung (auch familiärer Sprachhintergrund)
- Visuell-räumliche Fähigkeiten
- Aufmerksamkeitsfunktionen
- Allgemeine Problemlösefähigkeiten
- Sonstige schulische Leistungen
- Psychoemotionale Befindlichkeiten

Eine psychologische Diagnostik soll abklären, inwieweit die Schwierigkeiten in Mathematik durch kognitive Faktoren, Konzentrationsschwächen oder psychische Belastungen (mit-)bedingt sind. Umgekehrt soll festgestellt werden, wie sich negative Erfahrungen im Rechnenlernen auf die psychische Situation, z. B. in Form von Ängstlichkeit vor Mathematik, Beeinträchtigungen der Leistungsmotivation bis hin zu einer Übungsverweigerung des Kindes auswirken.

Differentialdiagnostisch ist zudem zu erheben, ob neben Schwierigkeiten im Rechnenlernen auch eine allgemeine Lernschwäche besteht oder ob zusätzliche Defizite vorliegen, die häufig kombiniert mit einer Rechenschwäche auftreten (Lese-/Rechtschreibschwäche, ADHS). Gegebenenfalls kann auch die Überprüfung der Hör- und Sehfähigkeit im Rahmen einer ärztlichen Untersuchung angezeigt sein.

Ansprechpartner für die Diagnostik der Rechenschwäche an den Schulen sind speziell ausgebildete Lehrkräfte und innerschulische Fachkräfte, sowie die Schulpsychologie-Bildungsberatung. Derzeit werden in den Bundesländern unterschiedliche Ausbildungen für Lehrkräfte, die sich zum Thema Dyskalkulie fortbilden möchten, angeboten.

Kommentierte Übersicht über mögliche Testverfahren

Die im Folgenden beschriebenen Verfahren stellen eine Auswahl von Schulleistungstests dar, welche zur Diagnostik der Rechenschwäche herangezogen werden können. Die hier angeführten Tests entsprechen grundsätzlich wissenschaftlichen Gütekriterien. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit. Die korrekte Anwendung und Interpretation der Tests erfordert umfassende diagnostische Kompetenzen und darf deshalb nur durch geschulte Expertinnen und Experten erfolgen.

Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fähigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse (TEDI-Math)

Kaufmann, Nürk, Graf, Krinzinger, Delazer, Willmes. 2009. Huber Verlag, Bern

Dieser Individualtest für Kinder zwischen 4 und 8 Jahren basiert auf kognitiv-neuropsychologischen Theorien der numerischen und rechnerischen Entwicklung und dient der Früherkennung numerischer Stärken und Schwächen. Eine Besonderheit besteht in der multikomponentiellen Herangehensweise, welche anhand von insgesamt 28 Subtests die Erstellung eines differenzierten Leistungsprofils erlaubt, das als Grundlage für die Interventionsplanung dienen kann. Die Durchführungszeit liegt im Durchschnitt bei 60 Minuten, kann jedoch abhängig von der jeweiligen Klassenstufe variieren.

Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ)

Van Luit, Van de Rijt, Hasemann. 2001. Hogrefe-Verlag GMBH & CO. KG, Göttingen

Dieses Verfahren ermöglicht es, das aktuelle Niveau der Zahlbegriffsentwicklung eines Kindes festzustellen. Es handelt sich um ein Individualverfahren für Kinder zwischen 5,0 und 7,6 Jahren, das sowohl im Kindergarten und in der Volksschule sowie in der Sonderschule eingesetzt werden kann. Die maximale Bearbeitungszeit beträgt 30 Minuten.

Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+)

Krajewski, Küspert, Schneider. 2002. Beltz Test GmbH, Göttingen

Dieser Test wurde entwickelt, um die mathematischen Kompetenzen bei Grundschülern am Ende des ersten und Anfang des zweiten Schuljahres zu überprüfen. Dieser Test kann als Einzel- oder Gruppentest durchgeführt werden. Die Bearbeitung der insgesamt 36 Aufgaben beansprucht maximal 45 Minuten.

Anmerkung: Dies ist ein deutscher Schulleistungstest, welcher sich an den Lehrplänen der deutschen Bundesländer orientiert, die sich allerdings von den österreichischen Lehrplänen nicht wesentlich unterscheiden. Diese Mathematiktests gibt es auch für die 2., 3. und 4. Klasse (DEMAT 2+ / DEMAT 3+ / DEMAT 4+) sowie für die 6. Und 9. Schulstufe (DEMAT 6+ / DEMAT 9.

Eggenberger Rechentest – Klassentest zur Früherkennung von rechenschwachen Kindern (ERT 0+, 1+, 2+, 3+ und 4+)

Lenart, Holzer, Schaupp. 2007/08/10/14 Huber Verlag, Bern)

Die Eggenberger Rechentests beinhalten Aufgabenstellungen, welche die kognitiven mathematischen Grundfähigkeiten, Ordnungsstrukturen sowie Rechenfertigkeiten überprüfen. Die Eggenberger Rechentests können als Einzel- oder Gruppentests verwendet werden und eignen sich als Klassenscreening zur Differenzierung im unteren Leistungsbereich. Die maximale Arbeitszeit variiert zwischen den einzelnen Tests. Der ERT 3+ sowie der ERT 4+ bestehen jeweils aus 3 Teilen und sollten nicht an einem Tag durchgeführt werden.

Heidelberger Rechentest – Erfassung mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulalter (HRT 1 – 4)

Haffner, Baro, Parzer, Resch, Langner. 2005. Hogrefe Verlag GmbH & Co. KG, Göttingen

Beim Heidelberger Rechentest handelt es sich weniger um einen Schulleistungstest als vielmehr um einen Test zur Prüfung basaler mathematik-relevanter Kompetenzen. Es werden dabei Rechenleistungen überprüft, die unabhängig von den spezifischen Lehrplänen in den unterschiedlichen Sprachen und Ländern sind. Der Test beinhaltet sowohl die Grundrechenarten als auch räumlich-visuelle und numerisch-logische Aufgaben. Der Test ist zu jedem Zeitpunkt ab Ende der 1. Klasse bis zum Ende der Volksschulzeit durchführbar. Das Verfahren ist für Gruppen- und Einzeltestung geeignet und kann je nach Anwendung zwischen 45 und 60 Minuten dauern.

Kalkulie: Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder

Gerlach, Fritz, Ricken, Schmidt (2007) Cornelsen-Verlag, Berlin

Die diagnostischen Aufgaben sind als Screeningaufgaben konstruiert und geeignet, Kinder zu erkennen, die vom Schulbeginn bis zum Ende der zweiten Klasse tragende mathematische Konzepte nicht entwickelt haben und deshalb mathematische Anforderungen nicht erfolgreich bewältigen. Die Aufgaben können mit der ganzen Klasse und als Einzeltest durchgeführt werden. Für den Gruppentest erfolgt die Auswertung über den Vergleich mit Normwerten. Für den Einzeltest steht ein System von Strategien zur Verfügung, so dass aus den Vorgehensweisen der Kinder in Ergänzung zu den Normvergleichen auf die erreichten Niveaus geschlossen werden kann. Aus den Ergebnissen wird abgeleitet, mit welchem Förderbaustein sich das Kind als nächstes auseinandersetzen soll. Aus der Diagnose können entsprechende Trainingsinhalte abgeleitet werden.

Sowohl Testaufgaben als auch Trainingsinhalte basieren auf einer Theorie über die hierarchische Entwicklung mathematischer Konzepte und Kompetenzen in der Schuleingangsphase.

Basis-Math 4 – 8

Moser Opitz, Reusser, Moeri Müller, Anliker, Wittich, Freesemann, Ramseier. 2010. Huber Verlag, Bern

Der Basis-Math 4-8 überprüft, inwieweit der mathematische Basisstoff beherrscht wird. Der Test kann ab dem letzten Quartal der 4. Schulstufe bis zum Ende der 8. Schulstufe eingesetzt werden. Der Individualtest differenziert im unteren Leistungsbereich und ist daher für Kinder und Jugendliche mit schwachen Mathematikleistungen geeignet. Die 48 Aufgaben sind 3 Anforderungsniveaus zugeordnet. Neben dem Beherrschen der Grundoperationen werden die Rechenwege, das dezimale Verständnis, die Zählkompetenz, sowie das Operationsverständnis und die Mathematisierungsfähigkeit erfasst.

Kriterien für gute Schulbücher

Der tägliche Unterricht und somit auch die Qualität des Lehrens und Lernens orientieren sich zu einem beträchtlichen Teil an den verwendeten Schulbüchern. Die Frage, welches Buch erfolgreiches Lernen am besten unterstützt, stellen sich Lehrkräfte immer wieder. Jedoch kann kein Buch alle Bereiche eines optimalen Mathematikunterrichts erfüllen. Daher erscheint es umso wichtiger, dass Lehrpersonen sich mit den Stärken und Schwächen der einzelnen Bücher beschäftigen und den Unterricht entsprechend ergänzen.

Nach Heckt und Sandfuchs (1993) wird von einem Mathematik-Schulbuch die Erfüllung folgender Kriterien erwartet:

- Übersichtliche Gestaltung
- Ansprechende, instruktive Bilder und grafische Darstellungen
- Verständliche Sprache und sachangemessene Veranschaulichungen
- Mehr als ein Lösungsmodell bei komplexeren Aufgabentypen
- Möglichkeiten zum selbstständigen Arbeiten
- Angebote zur Differenzierung
- Anreize zum aktiv-entdeckenden Lernen
- spielerische Aktivitäten
- Anregungen und Hilfen zur Realisierung offener Unterrichtsformen
- Vielfältige Bezüge zu anderen Bereichen des Unterrichts und der Umwelt der Kinder

Neben der Erfüllung dieser Kriterien muss das Mathematikschulbuch selbstverständlich auch den Anforderungen des aktuell gültigen Lehrplans entsprechen. Es empfiehlt sich daher einige Schulbücher unter Berücksichtigung der relevanten Kriterien miteinander zu vergleichen.

Zur Unterstützung des aktiv entdeckenden Lernens im Unterricht empfiehlt Gaidoschik (2010) unabhängig vom Schulbuch einige Aufgaben, wie z. B. die Behandlung des Zehnerübergangs vorerst ohne vorgegebene Strategie ausarbeiten zu lassen. Die Kinder sollen versuchen, selbst einen Weg zu finden, wie man die Aufgabe lösen kann, ohne dass mühsam gezählt werden muss. Zunächst wird empfohlen, dass die Kinder einzeln für sich Lösungen probieren und den Vorgang dann in Zweier-Gruppen diskutieren. Im Anschluss daran folgt eine »Rechenkonferenz«, bei der die Kinder im Sitzkreis ihre Strategien nacheinander erläutern. In einem weiteren Schritt ergänzt die Lehrkraft dann um vorteilhafte Strategien. Wesentlich erscheint hier die Tatsache, dass Kinder durch diese Methode und durch Schulbücher, die Anreize zum entdeckenden Lernen liefern, angeleitet werden, die mathematischen Zusammenhänge bewusst wahrzunehmen, zu diskutieren und selbstständig anzuwenden.

Leistungsfeststellung und Leistungsbeurteilung

HUBERT SCHAUPP

1. *Für die Leistungsfeststellung* (abgekürzt Lf) und die Leistungsbeurteilung (abgekürzt Lb) bei Rechenschwäche sind die gesetzlichen Bestimmungen der Lf und Lb anzuwenden (siehe Schulunterrichtsgesetz, BGBl. Nr. 472/1986, §§18, 20, 31a und Verordnung des BMUK vom 24. Juni 1974, BGBl. Nr. 371 über die Leistungsbeurteilung in Pflichtschulen sowie mittleren und höheren Schulen – Leistungsbeurteilungsverordnung – jeweils in der geltenden Fassung).

2. *Die besondere Berücksichtigung der Rechenschwäche* ergibt sich durch eine intensive, störungsbezogene Ausschöpfung der gesetzlich vorgesehenen Möglichkeiten der Lf und Lb. Unter störungsbezogener Ausschöpfung wird hier verstanden, dass nach Möglichkeit jene Quellen der Lf und Lb besonders herangezogen werden, die von der Rechenschwäche **nicht** betroffen sind. Primäres Ziel dabei ist, die vorgesehenen Möglichkeiten der persönlichen Stützung auszunützen und die Fortschritte stärker zu bewerten.

3. *Die störungsbezogene Ausschöpfung der gesetzlich vorgesehenen Möglichkeiten* der Lf und Lb besteht daher in:
   a. Ermutigung und Motivation
   b. hilfreichen Rückmeldungen über den Leistungsstand, die Art der Fehler, Hilfen zur Vermeidung der Fehler, die erreichten Ziele, die noch nicht erreichten Ziele und der Wege zu deren Erreichung
   c. Beratung/Information der Eltern und des Schülers/der Schülerin über die Verbesserung der Leistung durch Schullaufbahnentscheidungen bzw. durch Förderüberlegungen
   d. Berücksichtigung aller Lf-Quellen, insbesondere derer, bei denen keine schriftliche Leistung notwendig ist, d.h. mündliche, praktische und grafische Formen sowie die Mitarbeit
   e. Einbau von Übungsmöglichkeiten, Berücksichtigung von stressreduzierenden Bedingungen

4. Folgende rechtliche Rahmenbedingungen sind jedenfalls zu beachten

   Schularbeiten
   In Mathematik gibt es bei der Beurteilung von Schularbeiten Richtlinien, auf welche Bereiche sich die Beurteilung beziehen soll. Es sind dies nach §16 (1) der LBVO

   - gedankliche Richtigkeit
   - sachlich/rechnerische Richtigkeit
   - Genauigkeit

   Die Gewichtung dieser Kriterien ist abhängig von der Art und vom Umfang der Aufgabenstellung.

Mitarbeit

Die Feststellung der Mitarbeit umfasst

a. die in die Unterrichtsarbeit eingebundenen Leistungen,
b. Leistungen im Zusammenhang mit Übungen und Wiederholungen einschließlich der Bearbeitung von Hausübungen,
c. Leistungen bei der Erarbeitung neuer Lehrstoffe,
d. Leistungen im Zusammenhang mit dem Erfassen und Verstehen von unterrichtlichen Sachverhalten und
e. Leistungen im Zusammenhang mit der Fähigkeit, Erarbeitetes richtig einzuordnen und anzuwenden.

Bei der Mitarbeit sind Leistungen zu berücksichtigen, die der Schüler/die Schülerin in Alleinarbeit erbringt und Leistungen einzelner Schüler und Schülerinnen in der Gruppen- und Partnerarbeit.

Einzelne Leistungen im Rahmen der Mitarbeit sind grundsätzlich nicht gesondert zu benoten. Wohl aber hat eine Lehrperson Aufzeichnungen über diese Leistungen so oft und so eingehend vorzunehmen, wie dies für die Leistungsbeurteilung erforderlich ist.

Die Mitarbeitsfeststellung ist den anderen Prüfungsformen gleichwertig.

Schriftliche Leistungsfeststellungen (Tests)

Tests müssen mindestens zwei Unterrichtstage vorher angekündigt werden, dürfen in den allgemeinbildenden Pflichtschulen und in der Unterstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen höchstens 15 Minuten dauern und im zeitlichen Gesamtausmaß 30 Minuten pro Semester nicht überschreiten.

Mündliche Leistungsfeststellungen (Prüfungen)

Bei mündlichen Leistungsfeststellungen kann praktisches Material (z. B. Rechenhilfen) zugelassen werden.

In der Volksschule sind mündliche Prüfungen unzulässig.

Informationsfeststellungen

Feststellungen der Leistungen der Schüler (sog. Informationsfeststellungen), die der Lehrperson nur zur Information darüber dienen, auf welchen Teilgebieten Schülerinnen und Schüler die Lehrziele erreicht haben und auf welchen Teilgebieten noch ein ergänzender Unterricht notwendig ist, dienen keinesfalls der Leistungsbeurteilung.

Populäre didaktische Irrtümer im Rechenunterricht der Primarstufe:[16] Woher sie wohl kommen, wohin sie führen

ALBERT ELLENSOHN

»Fingerrechnen ist schlecht«

Das Rechnen mit den Fingern ist oft deswegen verpönt, weil sich an diesem, besonders wenn es sich über das 1. Schuljahr hinaus hält, das zählende Rechnen festmachen lässt. Also wird im Laufe der 1. Klasse den Kindern gesagt, sie sollten das Fingerrechnen lassen, weil jetzt schon das Rechnen im Kopf gewünscht sei. Für die Kinder bedeutet dieses Verbot oft die Verlagerung des Fingerrechnens in den Kopf oder an unsichtbare Stellen (wie die Zehen). Das zugrunde liegende rein ordinale »weiter und zurück« Zählen wird von so einem Verbot aber nicht positiv beeinflusst, vielmehr wird das zählende Rechnen ohne Finger nur noch schwieriger.

Fachlich muss beim Gebrauch der Finger zwischen der dynamischen (Weiterzählstrategie) und der statischen (Fingerbilder) Verwendung der Finger unterschieden werden, wobei das Weiterzählen die Konzentration auf die Strukturen verhindert, während die Fingerbilder das strukturierte Material sind, das man immer dabei hat (vgl. Gaidoschik, 2002).

»Klein(st)e Schritte sind beim Zahlenaufbau vor allem für schwächere Schüler nötig«

In fast allen in Österreich verwendeten Rechenbüchern[17] für die 1. Klasse wird ein sehr langsamer Aufbau der Zahlen im Anfangsunterricht praktiziert. Dabei werden die einzelnen Zahlen eingeführt und mit den dazugehörigen Rechnungen geübt. Meist dauert es bis zum Jahreswechsel, bis der Zahlenraum 10 erreicht wird, nachdem zuvor die »Zahlenräume 4, 5, 6, 7, 8, 9« gelernt wurden.[18] Die Vorstellung dahinter geht davon aus, dass Kinder nicht durch zu große Zahlen überfordert werden dürfen und es sich bei den Rechnungen um isolierte Fakten handelt, die man sich einzeln merken soll und kann. Das entspricht nicht im Geringsten den didaktischen Auffassungen der letzten Jahrzehnte. Am Beginn des Rechnens sollte die ganzheitliche Erarbeitung zumindest des Zahlenraums 10 (noch besser des Zahlenraums 20) stehen, da strukturelle Zusammenhänge erst im Rahmen der Zehnerstruktur sicht- und nutzbar werden. In der herrschenden Praxis werden mathematische Zusammenhänge von Anfang an

16 Die beschriebenen didaktischen Irrtümer sind weit verbreitet. Die zitierten Belegstellen haben keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sie dienen ausschließlich der Illustration. Die LeserInnen können sich dort auch detaillierter informieren.

17 Die einzigen Ausnahmen sind: *Die Matheprofis* und *Das Zahlenbuch*

18 Belegstellen zu diesen didaktischen Irrtümern können bei Bedarf beim Autor unter albert.ellensohn@salzburg.at angefordert werden.

nicht genutzt und der Aufbau nicht zählender Strategien damit nicht begünstigt.[19] Zählendes Rechnen ist die naheliegende Methode in den kleinen Zahlenräumen und muss daher später wieder »abgewöhnt« werden. Die Hoffnung der Verfechter der kleinschrittigen Methode ist, dass die »Rechensätzchen« direkt automatisiert werden könnten, was in der Praxis so meist nicht funktioniert.

»Null ist nichts«

Allzu häufig wird Kindern erklärt: »Null ist nichts. Da brauchst du nicht zu rechnen.« Diese alltagssprachliche Übersetzung entspricht auch der unmittelbaren Anschauung. Wenn ich von einem Apfel einen Apfel wegnehme, ist ja tatsächlich nichts auf dem Tisch. Mathematisch wäre hier die 0 besser mit »kein Apfel« übersetzt, weil diese Definition der 0 die zugrunde liegende Kategorie nicht mit auslöscht. Das »0 = nichts« Konzept verursacht bald Probleme. Schon bei den ganzen Zehnern führt es zu großer Verwirrung, weil Kinder dann z. B. 20 als »vorne 2, hinten nichts« auffassen könnten anstatt als »2 Zehner, kein Einer«.

»Formales Rechnen in Gleichungsform ist das ›eigentliche‹ Rechnen«

»Jetzt haben wir das +Zeichen eingeführt und beginnen mit dem wirklichen Rechnen«. Solche Aussagen kann man in Schulen häufig zu hören bekommen. Die Reduktion von Komplexität scheint das dahinterliegende Motiv zu sein, denn Erwachsene ziehen sich hier auf etwas zurück, das sie selbst ganz leicht können: zu den Rechnungen das passende Ergebnis zu nennen (Rechenfakten im 1+1). Im Grunde ist die Überbewertung der formalen Rechnungen mit der Hoffnung verbunden, dass man sich die Rechnungen in dieser Form leicht merken kann, denn als Erwachsener merkt man, dass man z. B. bei 3 + 4 = 7 »nicht rechnet«, sondern dieses Faktum ja direkt abruft. Dass das Einspeichern nicht auf dem gleichen direkten Weg funktioniert, könnte beim Versuch 121 siebenstellige Nummerncodes zu lernen (denn so viele Additionsfakten im Zahlenraum 20 gibt es) leicht überprüft werden. Der Nachteil der Betonung des formalen Rechnens besteht im Zerreißen von mathematischen Zusammenhängen (Rechenzettel) und der einseitigen Betonung des Übens von (oft nicht verstandenen) Rechensätzen.

»Es braucht nur das richtige Material/Hilfsmittel, vor allem für die schwächeren Kinder«

Wenn die Erarbeitungsmaterialien vor allem zur Unterstützung schwächerer Kinder verwendet werden, werden diese oft nicht zum Entdecken von Strukturen und Mustern und damit von Zusammenhängen genutzt, sondern den Kindern als Zählhilfen gegeben. Für diesen Zweck kann jedes Material *auch* genutzt werden. Materialien müssen das mathematische Modell, das die Kinder erwerben sollen, auch sichtbar machen, darüber hinaus ist das Wesentliche jedoch der Umgang des Kindes mit dem Material. Strukturen sind nicht von sich aus im Material enthalten, sondern müssen vom Menschen aktiv in die Anordnung »hinein«gesehen oder vielmehr »hinein«gedacht werden. Da Erwachsene Strukturen des Materials meist auf einen

19 Dieses kleinschrittige Vorgehen sieht man im Rechenunterricht immer wieder: bei den Rechnungen mit zweistelligen Zahlen, bei den schriftlichen Verfahren etc. Auch hier hat es im Grunde negative Folgen. Beispiel: im Zahlenraum 100 werden die zweistelligen Additionen so aufgebaut: 2 ganze Z addieren (20 + 30), einen ganzen Z und einen gemischten Z addieren (20 + 32), zwei gemischte Z addieren (23 + 32), zwei gemischte Zehner mit Zehnerübergang addieren (25 + 37). Kinder, die dies so lernen, konzeptualisieren das häufig so: Bei 2 ganzen Z muss nur »links« zusammenrechnen und dann die 0 dranhängen (20 + 30), dann kommt dazu, dass ich das linke rechnen und rechts die Zahl anschreiben muss (20 + 32), dann muss ich links und rechts einzeln zusammenzählen (23 + 32). Sobald dann der Zehnerübertritt »dazu« kommt erscheinen zwangsläufig die Fehler der Art 25 + 37 = 52, da die Kinder über Wochen von links nach rechts zu rechnen gelernt haben.

Blick entdecken, können sie sich schwer vorstellen, dass Kinder das gerade nicht können. Auch das geeignetste Material macht an sich nichts, erst der forschende und entdeckende Umgang des Kindes und die Kommunikation darüber macht es wertvoll. Meist werden auch strukturierte Materialien zum »Alles zählen« verwendet. Da dann das Ergebnis oft richtig ist, halten Erwachsene das für einen Erfolg.

»Der Zahlenstrahl ist zum Rechnen geeignet«

Besonders für Kinder, die sich mit dem Rechnen schwer tun, wird immer wieder der Zahlenstrahl als Mittel zur Wahl empfohlen. Ein nummerierter Zahlenstrahl ist sehr gut zur Orientierung im Zahlenraum geeignet (Wo befindet sich z. B. 45). Wenn er zum Rechnen verwendet wird, konzeptualisiert er das »Alles-Zählen«, denn auf ihm ist nur zählendes Rechnen möglich. Der Grund für diese zweifelhafte Empfehlung ist, dass mit Hilfe des Zahlenstrahls schwache Rechner auch in größeren Zahlenräumen, die fürs Zählen nicht mehr geeignet sind, richtige Ergebnisse erzielen können.

Da Erwachsene einen »inneren Zahlenstrahl von links nach rechts« beim Kopfrechnen benützen, meinen sie, die Kinder sollten diesen von Anfang an als Veranschaulichung nutzen. Der innere Zahlenstrahl der Erwachsenen ist eine innere Modellvorstellung, die aus Zahlenraumvorstellungen und vielfältiger Rechenpraxis resultiert, nicht direkter Lerngegenstand. Der innere Zahlenstrahl dient einer groben Abschätzung der Positionen und Bewegungen im Zahlenraum. Der in der Schule für die Kinder verwendete Zahlenstrahl ist nummeriert und zwingt deshalb bei Rechenvorgängen zum Abzählen und verfestigt das zählende Rechnen und die einseitig ordinale Zahlenvorstellung der rechenschwachen Kinder. Diese Ausführungen gelten analog für das Rechnen an der Hundertertafel.

»Zehnerübergang nur mit dem Teilschrittverfahren«

In vielen Rechenbüchern wird für den Zehnerübertritt vorrangig das Teilschrittverfahren (zuerst zum 10er und dann darüber) unterrichtet. Da Erwachsene Zehnerübertritte in größeren Dekaden (z. B. 78 + 5) in der Regel mit dem Teilschrittverfahren machen, halten sie es – auch mit einer gewissen Berechtigung – für das universal anwendbare Verfahren. Für Kinder, die die Partnerzahlen (ergeben zusammen 10) und die Zahlenzerlegungen im Zahlenraum 10 sehr gut können, stellt das Teilschrittverfahren eine gute Lösung dar. Für Kinder, die diese Voraussetzungen nicht mitbringen, stellt es eine formalisierte Überforderung dar, die dann meist zählend bewältigt wird. Andere nicht zählende Strategien über den Zehner wie Kraft der 5, Verdoppeln +1, 5er- und 10er-Vorteil, 9er-Trick ermöglichen den Kindern mit quantitativen Vorstellungen verknüpfte Verfahren zu automatisieren. Für zählende Rechner ist das Zehnerstoppverfahren eine zusätzliche Erschwernis.

»Rechenfakten werden durch viel Üben von (formalen) Rechnungen gebildet«

Da die Erwachsenen über die Rechenfakten des kleinen 1+1 und des 1×1 verfügen und gewöhnlich nicht wissen, wie diese gebildet werden, nehmen sie diesen einfachen mechanischen Vorgang an. Rechenschwache Kinder versuchen tatsächlich sich die formale Rechnung vorzustellen, wenn sie gefragt werden, was sie beim Rechnen denken. Dies schneidet jedoch die Bedeutung der Rechnung ab und verhindert, dass Zusammenhänge sichtbar und fürs Ableiten und nachherige Automatisieren genützt werden können. Mechanisches Üben von Unverstandenem ist unsinnig. Vielmehr soll Üben und Wiederholen der Konsolidierung und Automatisierung von inhaltlich erfassten Zusammenhängen dienen.

Zusammenarbeit Schule – Eltern

GERALD HORN

Der Kontakt mit den Eltern ist Lehrerinnen und Lehrern gesetzlich vorgeschrieben und wird zumeist auch engagiert gepflegt – das ist das Eine.

Dieser Kontakt muss zusätzlich zur Unterrichtsarbeit geleistet werden, und beinhaltet natürlich auch Umgang mit belasteten, manchmal auch wenig verständnisvollen Eltern – das ist das Andere.

Ob es nun Eltern von verhaltensschwierigen oder auch lernschwachen Kindern sind, sie haben meist eines gemeinsam: Sie stehen unter Druck. Die Erwartung ist oftmals, dass (m)ein Kind in der Schule problemlos lernt und auch sonst »funktioniert«. Das gilt in besonderem Maße auch für Eltern rechenschwacher Kinder. Warum? Weil die Rechenfertigkeit gemeinsam mit Lesen und Schreiben zu den Basis-Kulturtechniken zählt, die für die Alltagsbewältigung und den Schulerfolg im Vordergrund stehen.

Wenn Rechenschwierigkeiten auftreten, leiden daher nicht nur die Kinder darunter, sondern auch die Eltern. Oftmals verstehen sie auch nicht, warum gerade ihr Kind das nicht kann, was für sie doch so logisch erscheint. Oder aber es kommen all die Ängste und Unsicherheiten aus ihrer eigenen Schulzeit wieder hervor, weil sie möglicherweise ganz ähnliche Erfahrungen gemacht haben wie ihr Kind. Gerade an diesem Punkt müssen erste Schritte vonseiten der Schule gesetzt werden:

Erklärung der Ursachen

Wenn Eltern selbst keine Rechenschwierigkeiten gehabt haben, können sie oft nicht verstehen, warum das Zusammenzählen oder Wegzählen (am Beginn der Volksschule) nicht klappen will. Nicht der mangelnde Wille oder Faulheit sind es, die ein Kind verzweifeln lassen, vielmehr sind die Grundlagen im Umgang mit Zahlen und Mengen noch nicht gegeben. Gegenseitige Schuldzuschreibungen (zu Hause wurde dieses Verständnis vorschulisch nicht hinreichend angeregt/der Unterricht ist für das Kind zu schnell und seine Probleme werden zu wenig berücksichtigt) sind nun nicht hilfreich. Vielmehr ist zu klären, wie in Zukunft mit den Lernproblemen effizient umgegangen werden kann.

Eltern versuchen oft, ihre Kinder beim Rechenlernen durch Methoden zu unterstützen, die sie aus ihrer eigenen Schulzeit und Lernerfahrung kennen: »Ich hab das Rechnen mit dieser Methode gelernt, also muss das bei meinem Kind auch funktionieren.« Das kann richtig sein, muss es aber nicht. Genau so wenig, wie die Verallgemeinerung von Einzelfällen zum Erfolg führen muss, ist auch jener gut gemeinte Rat oft wirkungslos:

»Täglich Üben« !?

Ohne genaue Anleitung, wie geübt werden soll, sind es gerade diese Ratschläge, die bei Kind und Eltern zu noch mehr Druck führen und zur Verzweiflung. Nach dem Motto »Mehr ist besser als Weniger« wird meist die Übungsquantität in die Höhe geschraubt, oft übernimmt nun der Vater oder eine andere Person (»extern«) diese Aufgabe. Ohne genaue Anweisung, wie die nächsten kleinen Lernschritte und –ziele ausschauen, wird auch der gut gemeinte Rat »Mehr Üben« nichts nützen. Häufig sind LehrerInnen gerade an diesem Punkt mit dem Problem konfrontiert, dass Eltern trotz Erklärung der Lernschritte immer wieder auf ihre Weise versuchen, dem Kind das Rechnen beizubringen. Was in dieser Situation hilft, ist:

Coachen statt appellieren

Zuallererst heißt es nun einmal, das Vertrauen stärken: Sowohl jenes des Kindes als auch der Eltern. Sehr leicht kommt es nach erfolglosem Üben zu einer generalisierten Haltung, »dass ich zu blöd bin dafür«, »dass ich es ohnedies nicht schaffe«, oder »dass die Schule mit der neuen Methode Schuld ist« – also interne oder externe Ursachen gesucht werden. Ein geduldiges und konkretes Vorzeigen von Übungsmustern, das Darstellen von Konsequenzen daraus und auch eine regelmäßige, positive Rückmeldung wirken einer »Appell-Allergie« auf Seiten der Eltern entgegen. Besonders das differenzierte Hinsehen auf die Fehler, also nicht nur die Feststellung, ob eine Rechnung richtig oder falsch gerechnet wurde, ist wesentlich. Die Lehrerpersonen sind diejenigen Fachkräfte, die Lernprozesse zerlegen können und den Eltern und Kindern dies auf verständliche Weise nahebringen können.

Neue Akzente der Zusammenarbeit

Die Zusammenarbeit zwischen Schule und Elternhaus sollte von Lehrkräften bewusst als Arbeit und zentraler Bestandteil ihres professionellen Handelns verstanden werden. So weisen etwa Elternabende nach »klassischer Art« oftmals einen Belehrungscharakter auf. Eltern fühlen sich, wenn sie sich in der Schülerrolle wiederfinden, meist nicht wohl und verlangen nach einem partnerschaftlichen Umgang. Was spricht dagegen, den Eltern an mehreren Abenden eine »neue« Methodik näher zu bringen und so für sie nachvollziehbar zu machen, warum sie sinnvoll ist? Besonders bei Rechenproblemen eignet sich das Thema: »Wie lerne ich mit meinem Kind sinnvoll?« sehr gut für solche Zusammenkünfte. Und das endet bei Beratungsgesprächen, die durch eine sensible Gesprächsführung den Eltern das Gefühl vermitteln sollen, »Partner« und nicht nur »Kunde« zu sein. Dabei können hinzugezogene Expertinnen oder Experten sehr gut diese Thematik vertiefen und abrunden.

Miteinbeziehung der Schulpsychologie

Besonders bei hartnäckigen Rechenproblemen kann der Schulpsychologische Dienst wertvolle Diagnose-Arbeit leisten. Nicht immer sind lern-methodische oder lern-entwicklungsbedingte Ursachen an einer Problematik beteiligt. Oft sind es auch allgemeine, psychologische Hemmschwellen, die es zu überwinden gilt. In den Schulpsychologischen Beratungsstellen stehen Fachkräfte bereit, um weiterzuhelfen, wenn es gilt, Rechenprobleme in den Griff zu bekommen.

Was Eltern bedenken sollten (abseits von Tipps und Tricks)

GERALD HORN

Egal, ob man auf der Suche nach den Ursachen von Dyskalkulie im Internet stöbert, ob man Expertinnen bzw. Experten fragt oder ob man mit anderen betroffenen Eltern spricht: Eine befriedigende Antwort bekommt man selten. Es werden Hinweise gegeben auf mögliche Defizite in der Wahrnehmung eines Kindes, auf Defizite in der Motorik, der Konzentration, der Merkfähigkeit. Oder man hört, dass eventuell genetische Ursachen dafür verantwortlich sein könnten oder auch psychische Probleme. Aber: Im Einzelfall ist es kaum möglich, die Bedingungsfaktoren genau zu spezifizieren.

Eines lässt sich aber festhalten:

> **Dyskalkulie ist keine Krankheit** im herkömmlichen Sinn, die sich durch irgendein Medikament so einfach wegzaubern lässt.

Am ehesten kommt man diesem Phänomen nahe, wenn man dieses Problem als eine Begabungsvariabilität des Menschen auffasst. Es ist auch schwer nachvollziehbar, warum manche Menschen eine schnellere Auffassungsgabe als andere haben, manche schneller laufen können, manche sozial sensibler sind oder andere wiederum sich besser konzentrieren können. Individuelle Begabungsprofile unterscheiden sich und somit hat jedes Kind Stärken und Schwächen. Natürlich stellen Schwierigkeiten im Rechnenlernen Kinder, Eltern und Schule vor deutlich größere Herausforderungen als etwa eine gering ausgeprägte musikalische oder sportliche Begabung.

Entscheidend ist:

> Die gegenwärtige **Situation zu akzeptieren,** mit detektivischer Herangehensweise die momentane **Lernsituation zu analysieren** und **einen Schritt nach dem anderen** im Lernen und in der Förderung zu setzen.

Dazu gehört, dass man dem Kind hilft, sich in dieser besonderen Situation besser zurecht zu finden. Kein Kind wird erfreut sein, wenn es merkt, dass es beim Rechnen länger braucht und mehr Fehler macht als die Mitschüler oder Mitschülerinnen. Gerade hier muss man als Elternteil sensibel vorgehen, bei aller eigenen Motivation, dem Kind helfen zu wollen. Denn auch der tägliche Hinweis zu üben und aufzupassen, dass die Schularbeit gelingt, ist für ein Kind ein Hinweis darauf, dass ich als Schülerin oder Schüler ein Manko habe. Und mit der Zeit fangen solche Kinder an, frustriert zu sein und Situationen abzuwehren, die mit Übung und Lernen zu tun haben. Angst und Ablehnung entstehen, Verhaltensauffälligkeiten sind oft die Folge.

Weiters kommt es oft vor, dass man als Elternteil versucht ist, dem mangelnden Verständnis des Kindes für eine mathematische Aufgabe damit zu begegnen, dass es die elterliche Logik und Art von Mathematik übernehmen soll: »Schau her, ich mache das so, mach doch du das auch so, das ist einfacher«. Damit kommt aber das Kind in einen Zwiespalt, wie es etwas rechnen soll: »Soll ich es so machen, wie ich es in der Schule erklärt bekommen habe oder wie es mir zu Hause gesagt wird?« In diesem Moment ist die Verwirrung perfekt. Die Schule hat die Aufgabe, Mathematik fortschreitend und aufbauend den Kindern beizubringen. Darin ist das Lehrpersonal geschult (Zugegeben: Manche können das besser als andere).

Lassen sie sich daher von der **Lehrerin bzw. vom Lehrer erklären,** wie die **nächsten Schritte** im Lernprozess ausschauen werden.

Es führt am ehesten zum Erfolg, wenn Schule, Eltern und gegebenenfalls andere Personen (z. B. Nachhilfe-Personen) am selben Strang ziehen.

Die ständige Arbeit an einem Problem führt aber zwangsläufig zu Ermüdung und Erschöpfung, auch dann, wenn man als Elternteil selbst noch voll motiviert ist, immer noch mehr zu üben. Obwohl es zur Festigung des Gelernten notwendig ist, Wiederholungen zu planen, muss man genauso darauf achten, mit Pausen der Erschöpfung vorzubeugen.

Daher:

Erholungspausen einplanen!

Dies gilt insbesondere für Wochenenden und Ferienzeiten. Hier brauchen Kinder Auszeiten, die mit Spaß und Spiel ausgefüllt sind und in denen Schulprobleme nicht vorkommen. Für uns alle ist es selbstverständlich, beim Auftanken eines Autos stehen zu bleiben und den Motor abzuschalten – und erst nach dem Tankvorgang wieder weiter zu fahren. Auch die Kinder brauchen diesen Tank-Stopp, um nachher wieder mit frischer Energie weiter zu lernen. Als Regel gilt: Ein Tag in der Woche soll lernfrei bleiben, bei längeren Ferien sollte mehr als die Hälfte der freien Tage für die Erholung genützt werden.

Und noch einen wichtigen Punkt gilt es zu beachten:

Ein **Vergleich** meines rechenschwachen Kindes mit anderen (Geschwistern, Nachbarn, Verwandte) **hilft weder dem Kind noch den Eltern.**

Jedes Kind ist in seiner Entwicklung einzigartig und einmalig. Der Hinweis auf andere führt nur zu Stress und Verkrampfung, die wiederum ein klares Denken verhindern. Der Nebeneffekt dabei: Meist wirkt Stress ansteckend. Gestresste Kinder verursachen Anspannung bei Eltern, was wiederum zu einer völlig unerquicklichen Lernsituation führt.

Qualitätskriterien für außerschulische Förderangebote

KARIN LANDERL

Eine unterrichtsergänzende außerschulische Förderung des Zahlenverständnisses und der Rechenleistungen mag angezeigt sein, wenn der Entwicklungsstand eines Kindes bereits stark von der Leistung seiner Klasse abweicht und die schulischen Fördermaßnahmen schon zur Gänze ausgeschöpft wurden. Allerdings ist es für Eltern nicht immer einfach, sich ein qualifiziertes Urteil zu verschaffen, ob eine bestimmte Förderung nun auf dem aktuellen Erkenntnisstand basiert.

Folgende Kriterien können als Entscheidungshilfe dienen:

- Differenzierte Feststellung des derzeitigen Entwicklungsstandes als Voraussetzung für eine gezielte Förderung:
  - Wird eine detaillierte Erhebung der aktuellen Kompetenzen und Schwierigkeiten im Bereich Zahlenverarbeitung und Rechenleistungen sowie der allgemeinen kognitiven Entwicklung angeboten?
  - Werden dafür standardisierte diagnostische Verfahren eingesetzt, die eine objektive und zuverlässige Einschätzung des Entwicklungsstandes im Rechnen ermöglichen? Einige dieser Verfahren werden im Abschnitt »Kommentierte Übersicht über mögliche Testverfahren« dargestellt.
  - Werden die Ergebnisse dieser Diagnostik mit den Eltern in nachvollziehbarer Art und Weise besprochen und schriftlich dokumentiert, sodass sie für Lehrpersonen und Fachkolleginnen und -kollegen nachvollziehbar sind?

- Transparenz der Förderinhalte für Eltern:
  - Erkundigen Sie sich, ob die eingesetzten Förderprogramme und -methoden evidenzbasiert sind. Damit ist gemeint, dass ihre Wirksamkeit in wissenschaftlich kontrollierten Studien belegt sein soll[20]. Wissenschaftliche Evidenz für die Wirksamkeit liegen bisher ausschließlich für Programme vor, die sich inhaltlich vor allem mit Zahlen und Rechnen befassen (vgl. Ise, Dolle, Pixner & Schulte-Körne, 2012).
  - Für Trainings, die auf die Verbesserung allgemeiner kognitiver Teilleistungen wie akustische und visuelle Differenzierung, Serialität, oder Intermodalität, abzielen, ohne dass an Zahlenmaterial geübt wird, liegen keine Wirksamkeitsbelege vor, sie sind also nicht evidenzbasiert.
  - Auch allgemeine Konzentrations- und Gedächtnisübungen können die Leistungen in Mathematik nur dann verbessern, wenn bei einem Kind Auffälligkeiten in der Konzentrationsleistung vorliegen, die über den Mathematikunterricht (und die dazugehörigen Hausübungen) hinausgehen. Als evidenzbasierte Programme zur Verbesserung der Rechenleistung gelten sie ebenfalls nicht.

20 Falls es Sie interessiert, können Sie darum bitten, dass Ihnen derartige Studien zugänglich gemacht und erläutert werden. Derartige Studien sollen (1) in einer wissenschaftlichen Fachzeitschrift veröffentlicht sein (weil hier ein Begutachtungssystem durch Fachkollegen gewährleistet, dass die Studie wissenschaftlichen Kriterien entspricht) (2) die Leistung einer Gruppe von Kindern mit Rechenschwierigkeiten vor und nach der Förderung genau berichten (Vor-/Nachtestdesign) und (3) die Leistungssteigerung der Trainingsgruppe soll größer ausfallen als die einer untrainierten Kontrollgruppe.

- Zahlen und Rechnen sollen also den Schwerpunkt der Förderung darstellen: Ein maßgeschneidertes Förderprogramm unterstützt das Kind beim Aufbau des Zahlenverständnisses und zerlegt die zu erlernenden Rechenprozesse in kleine, gut strukturierte Schritte.

- Eine realistische Planung der Förderung (Zeitfenster)
  - Auf welchen Zeitraum wird die Förderung angelegt? »Schnellheilungsversprechen« sind mit Vorsicht zu betrachten. Je nach Schweregrad der Schwierigkeiten kann eine Förderung der Rechenleistungen mehrere Monate bzw. Jahre in Anspruch nehmen.
  - In welchen Abständen finden die Fördereinheiten statt? Je nach Alter des Kindes sollten 1 – 2 Förderstunden pro Woche angeboten werden.
  - Was muss zu Hause gemacht werden, wer soll das Kind beim Lernen daheim unterstützen? Es ist wichtig, das Kind nicht zu überfordern und die täglichen Übungseinheiten auf max. 15 bis 20 Minuten zu beschränken. Die Person, die die häuslichen Übungseinheiten durchführt, sollte in der Lage sein, die Motivation des Kindes dauerhaft aufrecht zu erhalten.

- Überprüfung des Fortschrittes (Verlaufsdiagnostik)
  - Werden kurzfristige Ziele (1–3 Monate) gesetzt und Leistungsfortschritte gezielt überprüft?
  - Werden zur Überprüfung der Lernfortschritte standardisierte Verfahren eingesetzt?
  - Werden Erfolge aber auch Misserfolge analysiert, mit Eltern und Kindern besprochen und bei der weiteren Planung geeignet berücksichtigt?

- Die Rahmenbedingungen
  - Gibt es einen geeigneten ruhigen Raum für die Förderung?
  - Wie findet die Förderung statt – einzeln oder in Kleingruppen? Ist sichergestellt, dass bei Gruppenförderung die individuellen Lernversuche ausreichend berücksichtigt werden können? Bei gravierenderen Problemen ist Einzelförderung vorzuziehen.
  - Wenn Übungseinheiten von den Eltern durchgeführt werden sollen: sind diese so vorbereitet, dass sie nicht dem »üblichen Hausübungsfrust« zum Opfer fallen?

- Wer führt die Förderung durch?
  - Wie gut ist die Förderinstitution in das regionale pädagogisch-psychologische Netzwerk möglicher Unterstützungsmaßnahmen eingebunden? Wird ein Austausch mit Schulen, Schulpsychologie, Zentren für Inklusiv- und Sonderpädagogik, Kinderärzten usw. gepflegt?
  - Hat die fördernde Person eine einschlägige Ausbildung an einer Universität oder pädagogischen Hochschule absolviert? Auch private Anbieter verleihen Diplome, die aber nicht immer einer pädagogisch-psychologischen Qualitätskontrolle unterliegen und manchmal von sehr geringem Umfang (zwei oder drei Tage) sind. Personen, die eine Rechenförderung durchführen, müssen über eine pädagogisch-psychologische Grundausbildung verfügen. Informationen zu Umfang und Inhalt verschiedener Ausbildungen kann man zum Beispiel beim Berufsverband Akademischer Legasthenie- und Dyskalkulie-Therapeuten (BALDT, www.lrs-therapeuten.org) erhalten, der sich der Verbreitung und Umsetzung evidenzbasierter Förderprogramme verpflichtet hat.

Literatur

Empfehlenswerte Literatur – Grundlegendes

Diese Liste stellt eine Auswahl an theoretischen Abhandlungen und praktischen Anregungen dar und erhebt nicht den Anspruch auf Vollständigkeit.

Dehaene, S. (2012) (2. Aufl.). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können.* Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser.
In diesem Buch wird in gut verständlicher Sprache die Funktionsweise der Wechselwirkung von mathematischer Entwicklung und Gehirnstruktur erläutert. Der Autor ist Mathematiker und einer der renommiertesten Neurowissenschaftler in diesem Feld.

Gerster, H.D., & Schultz, R. (2003). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht.* Freiburg im Breisgau: Pädagogische Hochschule Freiburg.
Die Veröffentlichung eines Forschungsprojektes »Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen« enthält mathematisches Grundlagenwissen sowie detaillierte Fallberichte und Förderansätze. Geeignet für (wissenschaftlich) interessierte LehrerInnen und TherapeutInnen.
http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf

Landerl, K. & Kaufmann, L. (2013). *Dyskalkulie: Modelle, Diagnose, Intervention* (2. Aufl.). München: Reinhardt Verlag.
Dieses didaktisch aufbereitete Lehrbuch stellt neurokognitive Modelle des Zahlenverständnisses und des Rechnens detailliert dar, erörtert Verursachungsmodelle der Dyskalkulie und gibt einen Überblick über Methoden der Dyskalkuliediagnostik. Die Autorinnen beleuchten Interventionsstrategien und Trainingsprogramme kritisch bezüglich ihrer Wirksamkeit. Übungsfragen und ein umfangreiches Glossar sind enthalten.

Lenart, F., Holzer, N., & Schaupp, H. (2008). *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie. Erkennung : Prävention : Förderung.* Graz: Leykam.
Eine Zusammenfassung der Ergebnisse des Grazer Forschungsprojektes »Dyskalkulie: Wahrnehmungen und Fakten«. Ein Überblickswerk über den aktuellen Stand des Wissens in Österreich zum Thema Rechenschwäche.

Lorenz, J.H. (2003). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.
Mittels Fallbeispielen versucht der Mathematikdidaktiker die Wahrnehmung von Fehlern und den Umgang mit diesen Fehlern von Lehrpersonen zu verändern. Besser als jede Therapie ist die Prophylaxe – so der Autor.

Mathematikunterricht in der Diskussion. Aus: *Erziehung und Unterricht – österreichische pädagogische Zeitschrift.* 3–4/2004. Wien: öbv&hpt.
Eine Sammlung von Artikeln zu den Themen: Schulbuch; Schularbeiten; Leistungsdebatte; Unterrichtsmethodik und Kreativität.

Moser-Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Bern, Stuttgart, Wien: Hauptverlag.
Dyskalkulie wird umfassend dargestellt und eine interessante empirische Studie zu den Kompetenzen rechenschwacher Kinder der 5. und 8. Klassen liefert neue Erkenntnisse über deren Schwierigkeiten beim Erwerb des Rechnens.

Moser-Opitz, E. (2008). *Zählen – Zahlbegriff – Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen.* Bern, Stuttgart, Wien: Hauptverlag.
Nach der Klärung der Forschungslage zur Rechenentwicklung widmet sich die Autorin dem Erstunterricht in Sonderklassen und hebt die Bedeutung von fachdidaktischen Erkenntnissen auch in der Sonderpädagogik hervor.

Schneider, W., Küspert, P., & Krajewski, K. (2013). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen.* Paderborn: Verlag UTB Ferdinand Schöningh GmbH.
Dieses Lehrbuch stellt die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von den Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten über die Grundschule bis hin zur Oberstufe detailliert dar. Die Effektivität von Unterrichtsmodellen und Förderansätzen wird verglichen. Die Aussagekraft wissenschaftlicher Studien (z. B. LOGIK, PISA) und diagnostischer Verfahren wird kritisch beleuchtet.

Von Aster, M., & Lorenz, J.H. (2005). *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* Göttingen: Vandenhoeck & Rupprecht.
Dieses Buch gibt einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschungs- und Entwicklungsarbeiten, die in den letzten Jahren auf dem Gebiet der Rechenstörungen geleistet wurden, wieder. Rechenschwäche wird aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet und Hinweise, wie Rechenschwäche bereits frühzeitig diagnostiziert und behandelt werden kann, werden gegeben. Ein großer Raum wird den Förderaspekten gewidmet, die auf die Behebung der lernhemmenden Ursachen abzielen.

Für die Praxis

Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen (1999). *Rechenstörungen. Diagnose – Förderung – Materialien* (3. Auflage). Donauwörth: Auer.
Dieses Buch – auch für den Sekundarbereich gut geeignet – bietet eine Sammlung an wichtigen Grundinformationen, Erklärungshilfen, Denkanstößen und ganzheitlich orientierten, praktischen Fördermaterialien zur Behebung von Rechenstörungen.

Gaidoschik, M. (2002). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern.* Wien: öbv&hpt.
Dieses Buch bietet eine Fülle an praktischen Anregungen für den schulischen Alltag: von der frühzeitigen Erkennung von Rechenstörungen auf den verschiedenen Schulstufen der Grundschule bis hin zur Vermeidung von Rechenstörungen. Auch welche Hilfen – schulischer und außerschulischer Art – es für rechenschwache Kinder gibt.

Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen.* Wien: öbv&hpt.
Der Autor bietet auf reich illustrierten Seiten detaillierte Anregungen für einen »präventiven« Rechenunterricht, da mit geeigneten Maßnahmen das Risiko von Rechenschwäche deutlich minimiert werden kann.

Gaidoschik, M. (2015). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Seelze. Kallmeyer Verlag.
Die »ganzheitliche« Erarbeitung des kleinen Einmaleins, anstatt die »Malreihen« mechanisch auswendig zu lernen. Nach diesem Konzept lernen die Kinder zunächst leicht zu merkende Kernaufgaben und lernen erst dann das verständige rechnerische Ableiten aller anderen Aufgaben. Da dieses Vorgehen hohe Ansprüche an die Lehrperson stellt, sind in dem Band das nötige fachdidaktische Hintergrundwissen mit konkreten Leitfäden zum Erarbeiten und Üben verbunden.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser-Opitz, E., & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen.* Seelze: Kallmeyer Verlag.
Die AutorInnen gehen einen erfolgsversprechenden Weg: Die Förderung der schwachen Rechner innerhalb der heterogenen Klassengemeinschaft mit einem qualitätsvollen Rechenunterricht zu verknüpfen. Da die Ablösung vom zählenden Rechnen einen entscheidenden Schritt zum Mathematiklernen darstellt, helfen 20 gut ausgearbeitete, theoretisch begründete und praktisch erprobte Fördereinheiten den Kindern bei der Entwicklung nicht zählender Konzepte.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine.* Seelze: Kallmeyer Verlag.
Dieses Buch enthält unter anderem hilfreiche Anleitungen zum Einsatz der Methode des lauten Denkens zur Feststellung von Problemen im Rechnen. Der Bogen reicht von der Kenntnis der Zahlwortreihe über die strukturierte Zahlauffassung und die Zahlbeziehungen bis zu Rechenstrategien und dem Operationsverständnis. Die beiliegende CD enthält Beobachtungsbögen, aber auch Arbeitsblätter und zahlreiche weitere Arbeitsmaterialien als kopierfertige Fördermaterialien zum Einsatz in der Volksschule.

Küppers, H. (2005). Mathematik In: *Pädagogische Leistungskultur: Materialien für Klasse 1 und 2. Arbeitskreis Grundschule.* Grundschulverband.
Ein Band mit vielen Anregungen und Beispielen aus und für die Praxis.

Krüll, K. E. (2000). *So macht Rechnen wieder Spaß. Ein Arbeitsheft zur Rechenschwäche.* München: Ernst Reinhardt.
Dieses Arbeitsheft verfolgt drei Ziele: Die Unterbrechung des negativen Selbstkonzeptes rechenschwacher Kinder; die Erarbeitung der Grundlagen des Rechnens und die Erzeugung einer positiven Grundstimmung für das Rechnen.

Le Bohec, P. (1997). *Verstehen heißt Wiedererfinden*. Bremen: Pädagogik-Kooperative, Perspektiven Druck.
Ein Buch von einem Freinet-Lehrer, der mit viel Spürsinn für kindliche Prozesse zu einem kreativen Unterricht anregt. Für alle LehrerInnen, die offenes Lernen praktizieren (wollen).

Lorenz, J.H., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht.* Hannover: Schroedel.
Gilt als empfehlenswertes Standardwerk für alle GrundschullehrerInnen. Neben theoretischem Hintergrund auch viele praktische Hinweise.

Lorenz, J.H. (1997). *Kinder entdecken die Mathematik.* Westermann Verlag.
Das Buch enthält viele Anregungen für einen kindgerechten, offenen Mathematikunterricht und ist eine Bereicherung für (Mathematik-) LehrerInnen.

Lorenz, J.H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik.* Stuttgart. Kohlhammer Verlag.
Die Entwicklung der Basisfertigkeiten des Rechnenlernens, die meist im Kindergartenalter erworben werden, steht im Mittelpunkt der Publikation. Der Autor plädiert kenntnisreich und mit vielen Beispielen versehen für umfassende mathematische Bildung im Kindergarten.

Pixner, S. (2010). *Dyskalkulie: Ein Ratgeber für Eltern, Lehrer und Therapeuten.* Idstein: Schulz-Kirchner Verlag GmbH.
Dieser Ratgeber hilft Eltern, die Schwierigkeiten rechenschwacher Kinder besser zu verstehen und geeignete Hilfsangebote zu finden. Es werden Übungen und Spiele vorgestellt, mit denen sie ihr Kind zu Hause unterstützen und Fördermaßnahmen sinnvoll ergänzen können. Auch zahlreiche Anregungen für andere Personengruppen (Lehrpersonen, Therapeutinnen und Therapeuten) sind enthalten.

Scherer, P., & Bönig, D. (Hrsg.). (2004). *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern.* Frankfurt/Main: Grundschulverlag.
Für alle LehrerInnen an Volksschulen, die an Praxisbeispielen Interesse haben. Eine wahre Fundgrube.

Spiegel, H. & Selter, C. (2003). *Kinder und Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten.* Seelze-Velber: Kallmeyer Verlag.
Auf leicht verständliche und unterhaltsame Weise geschrieben, für alle, die mehr über das Denken von Kindern wissen wollen und was man richtig oder falsch machen kann, wenn man ihnen beim Lernen von Mathematik helfen will. Für alle (Lehrer), die einen kompetenzorientierten Blick auf das Denken der Kinder werfen (wollen), eine Pflichtlektüre.

Spiegel, H., & Selter C. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag – vergriffen, aber unter: http://kira.dzlm.de/kirafiles/uploads/doc/WKR_Selter_Spiegel_komplett.pdf zu finden.
Ein wunderbares Buch für alle, die dem mathematischen Denken von Volksschulkindern auf die Spur kommen wollen.

Unterhaltsames

Baruk, S. (1998). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik.* Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser.
In diesem Buch werden mittels vieler Beispiele die negativen Folgen eines »ganz gewöhnlichen Mathematikunterrichts« gezeigt. Eine bisweilen schonungslose Abrechnung mit Mathematikunterricht, der ein Verstehen der Mathematik eher verhindert als fördert.

Enzensberger, H.M. (1997). *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben.* München/Wien: Carl Hanser.
Selbst schwierigste Mathematikaufgaben werden im Traum vom Zahlenteufel anschaulich und humorvoll gelöst. Ein Fundus an Ideen und Metaphern, die man nicht mehr so leicht aus dem Kopf bekommt. Für Kinder ab der Sekundarstufe ein gut lesbares Buch. Auch die gleichnamige CD-ROM »Zahlenteufel« ist intelligent und unterhaltsam gleichzeitig.

Ifrah, G. (1998). *Universalgeschichte der Zahlen.* Frankfurt/New York: Campus.
Es ist ein reich illustriertes Buch mit fast 600 Seiten über die Kulturgeschichte der Zahlen und Ziffern, der Zahlsysteme und der Rechenverfahren. Spannend zu lesen wie ein Roman.

Links

Mathematikbereich im Österreichischen Schulportal für die Volksschule:
http://vs.schule.at

Landesschulrat für Salzburg: Informationen zum Rechnen:
http://www.lsr-sbg.gv.at/schule-und-unterricht/paedagogische-themen-unterrichtsprinzipien/rechnen

Das Recheninstitut zur Förderung des mathematischen Denkens:
http://www.recheninstitut.at/tag/rechenschwache

PIKAS. Kooperationsprojekt zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Primarstufe:
http://pikas.dzlm.de

KIRA. Kooperationsprojekt zur Weiterentwicklung der Grundschullehrerausbildung:
http://kira.dzlm.de

Mathe 2000+: Seit den 1970er Jahren entwickeltes Projekt zur Grundlagenforschung des Mathematikunterrichts in der Volksschule. Daraus entwickelte Materialien und Lehrbücher vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe 1:
http://www.mathe2000.de

Kopf und Zahl. Deutsches Rechenschwächemagazin seit 2003. Abrufbar über:
http://www.rechenschwaeche.de/Kopf_und_Zahl/Kopf_und_Zahl_Ueberblick.html

Quellenverzeichnis

Barth, K. (2009). Früherkennung von Lernstörungen. In: Dieter Irblich & Gerolf Renner (Hrsg.), *Diagnostik in der klinischen Kinderpsychologie – Die ersten sieben Jahre*. Göttingen: Hogrefe, S. 213–218.

Born, A., Oehler, C. (2011). *Kinder mit Rechenschwäche erfolgreich fördern. Ein Praxisbuch für Eltern, Lehrer und Therapeuten*. Stuttgart: Kohlhammer Verlag.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology,* 3, 21–29.

Dehaene, S. (2012) (2. Aufl.). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können.* Basel: Springer Basel AG.

Eckert, E. & Waldschmidt, I. (2007). *Kosmische Erzählungen in der Montessori Pädagogik.* Berlin: LIT Verlag Dr. W. Hopf.

Eckstein, B. (2013). *Rechnen statt Zählen: Diagnoseaufgaben und Fördermaterial für den inklusiven Unterricht (1. Klasse).* Hamburg: Persen Verlag S. 9.

Fthenakis, W. (Hrsg.) (2014). *Frühe mathematische Bildung. Natur-Wissen schaffen* (Band 2). Essen: LOGO Lern-Spiel-Verlag GmbH.

Gaidoschik, M. (2002). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern.* Wien: öbv & hpt VerlagsgmbH & Co. KG.

Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwäche vorbeugen. 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen: Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern* (Nachdruck 2011). Wien: G & G Kinder- u. Jugendbuch.

Gaidoschik, M. (2010). *»Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres.«* (Dissertation Wien, 2010). Abgerufen von http://othes.univie.ac.at/9155/1/2010-01-18_8302038.pdf

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht.* Frankfurt/Main: Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2012). Rechenschwäche – Dyskalkulie: Eine unterrichtspraktische Einführung für Lehrer/-innen und Eltern (7. Aufl.). Buxtehude: Persen.

Gaidoschik, M. (2012). Wie Kinder rechnen lernen. *Erziehung und Unterricht 3/4*, 306–316.

Gasteiger, H. (2011). *Mathematisches Lernen von Anfang an. Kompetenzorientierte Förderung im Übergang Kindertagesstätte – Grundschule.* Abgerufen von http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Gasteiger_Internet.pdf

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's concept of number.* Cambridge/MA: Harvard University Press.

Göbel, S. M., Watson, S.E., Lervåg, A., & Hulme, C. (2014). Children's arithmetic development: it is number knowledge, not the approximate number sense that counts. *Psychological Science,* 25, 789-798.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen* (2. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Heckt, D. & Sandfuchs, U. (Hrsg.). (1993) *Grundschule von A-Z.* Braunschweig: Westermann.

Herdermeier, C. (2012). *Rechenschwache Kinder individuell fördern. Ein systemorientiertes Programm mit editierbaren Materialien.* Mühlheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Ise, E., Dolle, K., Pixner, S., & Schulte-Körne, G. (2012). Effektive Förderung rechenschwacher Kinder – eine Metaanalyse. *Kindheit und Entwicklung,* 31, 181-192.

Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2011). *Rechenstörungen: Diagnose und Förderbausteine* (3. Aufl.). Velber: Kallmeyer.

Krajewski, K., & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfähigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht,* 53, 246-262.

Krajewski, K. (2005). Früherkennung und Frühförderung von Risikokindern. In M. von Aster, & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern* (S. 150-164). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Krauthausen, G. (1993). *Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden.* Abgerufen von http://math-www.uni-paderborn.de/~hartmut/AndereTexte/GKrJMD93.pdf#

Lambert, K. (2014). *Rechenschwäche: Grundlagen, Diagnostik und Förderung* (1. Aufl.). Göttingen: Hogrefe Verlag.

Landerl, K. (2013). Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills – a longitudinal study. *Frontiers in Psychology,* 4, 459.

Landerl, K. & Kaufmann, L. (2013). *Dyskalkulie: Modelle, Diagnose, Intervention* (2. Aufl.). München: Reinhardt Verlag.

Lorenz, J. H. (2005). Grundlagen der Förderung und Therapie. In M. von Aster, & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern* (S. 165-177). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik, Frühe mathematische Bildung und Förderung, Entwicklung und Bildung in der Frühen Kindheit* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Pikas: Abgerufen von http://pikas.dzlm.de/material-pik/themenbezogene-individualisierung/haus-6-unterrichts-material/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-/arithmetikunterricht-in-der-schuleingangsphase-organisation-und-unterrichtsbeispiele.html

Reeve, R. & Humberstone, J. (2011). Five- to 7-year-olds' finger gnosia and calculation abilities. *Frontiers in Psychology,* 2, 359.

Schleifer, P., & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, 14, 280–291.

Schneider, W., Küspert, P., & Krajewski, K. (2013). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen.* Paderborn: Verlag UTB Ferdinand Schöningh GmbH.

Schuchardt, K., Piekny, J., Grube, D. & Mähler, C. (2014). Einfluss kognitiver Merkmale und häuslicher Umgebung auf die Entwicklung numerischer Kompetenzen im Vorschulalter. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 46*, 24-34.

Selter, C. (1995). *Zur Fiktivität der »Stunde Null« im arithmetischen Anfangsunterricht.* Abgerufen von http://math-www.uni-paderborn.de/~hartmut/AndereTexte/Stunde_0.pdf.

Spiegel, H. (1992). *Was und wie Kinder zu Schulbeginn schon rechnen können – Ein Bericht über Interviews mit Schulanfängern.* Abgerufen von http://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Mathemathik/Was_Kinder_schon_rechnen.pdf

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Lengerich: Papst Publisher.

Von Aster, M. (2003). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erkenntnisse zu Rechenstörungen. In : Fritz, A., Ricken, G., Schmitt, S.: *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Ein Handbuch.* Weinheim 2003, S. 163–178.

Von Aster, M., Kaufmann, L. & Lipka, M. (Hrsg.) (2015). Rechnen und Fingeragnosie. [Themenheft]. *Lernen und Lernstörungen, 4(*3).

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen.
Abgerufen von www.sinus-an-grundschulen.de/.../Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Wittmann, E. (2011). Über das »rechnende Zählen« zum »denkenden Rechnen«. Abgerufen von Grundschulzeitschrift 248.249 http://zahlenbuchfanclub.de/?wpfb_dl=8

Wittmann, E.C. & Müller, G.N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen (Bd. 2). Vom Halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E.C. & Müller, G.N. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wittmann, E.C. & Müller G.N. (2010). *Das Zahlenbuch 1.* Wien: öbv.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature,* 417, 138–139.

Zeidl-Steiner, R. (2012). *Eine Lernspur durch den Zahlenraum 10. Eine ausführliche Unterrichtsdokumentation aus einer 1. Schulstufe zur Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10.* Abgerufen von http://www.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Volksschule/Dateien/Mathematik/Lernspur__durch_den_Zahlenraum_10.pdf

Glossar

analoger Zahlencode / analoge Mengenrepräsentation
Dieser spielt bei der Bedeutung von Zahlen eine große Rolle. Sowohl die Anzahl von Elementen (z. B. Punktmengen) als auch die Positionierung an einem inneren Zahlenstrahl wird im analogen Code dargestellt.

arabisches Zahlenwissen
Wissen, um die Zahlen in Form von Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 …).

Automatisieren
Vorgänge so gut einüben, dass sie ohne großen Denkaufwand (automatisiert) abgerufen werden können. S. a. Rechenfakten.

basal
grundlegend

Differenzierung
Unterschiedliche Angebote an die Lernenden entsprechend deren Lernausgangslage und Lernvoraussetzung.

Dyskalkulie
(Erhebliche) Schwierigkeiten beim Rechnen Lernen (auch Rechenstörung, Rechenschwäche).

Eins-zu-Eins-Zuordnung
Zuordnen von Elementen einer Menge zu Elementen einer anderen. Bedeutsam auch beim Abzählen, wo jedem Element ein Zahlwort zugeordnet wird.

Individualisierung
Umgang mit Heterogenität in Schulklassen. Auf die individuellen Möglichkeiten der Kinder abgestimmtes Vorgehen.

Intervention
Maßnahme, die gesetzt wird

Kardinalzahl
bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge

Kompetenz
Zusammenspiel von Fähigkeiten und Fertigkeiten, wodurch situationsgerechtes Handeln oder Problemlösen möglich wird.

Kraft der 5
Die Fünferstrukturierung ist die erste nicht zählende Zahlenvorstellung (ganze Hand). Sie wird vielfältig genützt: Fingerbilder für die Zahlen ab 6, Additionen und Subtraktionen mit 5, Zehnerübertritt.

Lernumgebungen, substanzielle
In ihnen haben die Kinder vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten in verschiedenen Fähigkeitsniveaus zu zentralen Zielen der Mathematik. Sie tragen zur Differenzierung bei.

mathematische Konzepte
Zahl- und Operationsmodelle, die im Hintergrund der Rechenvorgänge wirken

mathematische Vorläuferfähigkeiten
Vorerfahrungen mit Mengen und Zahlen als Basis, um Rechnen zu lernen

Mengenkonstanz
Eine abgezählte Menge kann ohne nochmals gezählt zu werden, richtig benannt werden

Mengenstrukturierung
Fähigkeit, Strukturen in Mengen und Zahlen zu erkennen und für Rechenprozesse zu nutzen. S. a. Teil-Ganzes-Konzept.

Ordinalzahl
bezeichnet die Position in einer Reihenfolge: 5 = die fünfte Murmel, die gezählt wurde

Partnerzahlen
Zahlenpaare, die zusammen 10 ergeben (1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5)

Rechenfakten
»Kopfrechnungen«, die kompetente Rechner aus dem Gedächtnis direkt abrufen können (v. a. 1 + 1 im Zahlenraum 20 und kleines 1 × 1)

Rechen-Operationen
Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren

Rechenprozeduren
Wissen um Vorgehensweisen bei Rechenoperationen (z. B. die Algorithmen des schriftlichen Rechnens mit mehrstelligen Zahlen)

Relationalzahl
Abstand oder Unterschied zwischen zwei Zahlen (z. B. 5 ist um 3 mehr als 2 – 3 fungiert hier als Relationalzahl)

Sekundärproblematik
Probleme, die als Folge einer vorangehenden Problematik auftreten

simultane Mengenerfassung = Subitizing
schnelles Erfassen der Anzahl von Dingen, ohne diese abzählen zu müssen. Dies ist bis zu einer Menge von vier Elementen möglich. Gelingt es, größere Mengen »auf einen Blick« zu erfassen, so spricht man von »Quasi-Simultanerfassung«. Dies gelingt durch schnelle Strukturierung der vorgegebenen Menge.

Teile-Ganzes-Konzept
Verständnis dafür, dass eine Gesamtmenge in mehrere Teilmengen aufgliedert werden kann und dass Mengen aus (kleineren) Mengen bestehen.

Triple-Code-Modell
neurokognitives Modell der Zahlenverarbeitung, das die Vernetzung unterschiedlicher Auftretensformen von Zahlen (analog/Zahlwörter/arabische Zahlen) betont (Dehaene, 2012) s. a. Analoger Zahlencode

zählendes Rechnen
Rechenstrategie, die Addition und Subtraktion als ein Dazu- und Wegzählen (oft an den Fingern) praktiziert

Die Ansprechpartner/innen im Bildungsministerium und in den Bundesländern

Bildungsministerium
Abteilung I/8, Freyung 1, 1014 Wien
+43 1 53120-2584 oder -2590, schulpsychologie(at)bmb.gv.at
MR Dr. Gerhard Krötzl, gerhard.kroetzl@bmb.gv.at
MR Dr.in Beatrix Haller, beatrix.haller@bmb.gv.at

Burgenland
7001 Eisenstadt, Kernausteig 3, +43 2682 710 1013,
Hofrätin Dr.in Elfriede Jud

Kärnten
9020 Klagenfugt, Kaufmanngasse 8, +43 463 5812,
Mag.a Ina Tremschnig

Niederösterreich
3109 St. Pölten, Rennbahnstraße 29, + 43 2742 280-4700,
Hofrätin DDr.in Andrea Richter

Oberösterreich
4041 Linz, Postfach 107, Sonnensteinstraße 20, +43 732 7071-2321,
MMag. Andreas Girzikovsky

Salzburg
5026 Salzburg, Aignerstraße 8, +43 662 8083-4221, Hofrätin Mag.a Helene Mainoni-Humer

Steiermark
8015 Graz, Körblergasse 23, +43 5 248 345-199, Hofrat Dr. Josef Zollneritsch

Tirol
6020 Innsbruck, Südtiroler Platz 10–12/5, +43 512 52033-540,
Hofrätin Dr.in Brigitte Thöny

Vorarlberg
6900 Bregenz, Bahnhofstraße 12, +43 5574 4960-211,
Hofrat Univ.-Doz. Dr. Walter Bitschnau

Wien
1010 Wien, Wipplingerstraße 28, +43 1 525 25-77505,
Hofrätin Dr.in Brigitta Srncik

Schulpsychologie-Bildungsberatung

Die Schulpsychologie-Bildungsberatung steht als eine in das Schulsystem integrierte psychologische Einrichtung Schüler(innen), Lehrer(innen) und Eltern zur Verfügung.

www.schulpsychologie.at