INTERVIEW

Kinder sind keine Taschenrechner

Ihr Kind beherrscht das kleine Einmaleins? Schön – aber rechnen kann es deshalb noch lange nicht. Schüler müssen früh die tiefere Bedeutung von Zahlen und Rechenoperationen verstehen, so die Mathematikdidaktikerin Inge Schwank. Das hilft gegen Rechenschwäche. Und macht Spaß.


UWE LEWANDOWSKI / GEHIRN&GEIST

Viele Schüler scheitern im Mathematikunterricht, weil sie anders denken, als es die Zahlenkunst erfordert. Bereits in der Grundschule wird versäumt, ihnen eine andere, passende Denkweise beizubringen, sagt Inge Schwank, die seit 20 Jahren über »Kognitive Mathematik« forscht und selbst Mathe-Kurse für Schüler anbietet. In Einzelfallstudien fand sie heraus, dass viele Kinder eher in statischen Strukturen denken. Legt man ihnen Musterergänzungsaufgaben vor (siehe rechte Seite), dann achten sie auf die Eigenschaften der dargestellten Formen, also etwa auf Ähnlichkeiten: In der Figur links oben sind alle Linien gerade. Rechts oben und links unten sind jeweils zwei Linien nach außen gebogen. Also muss die fehlende Form rechts unten vier Linien aufweisen, die nach außen weisen.

Im Gegensatz zu diesem »prädikativen« (also Eigenschaften zuschreibenden) Denken gehen andere Kinder funktional vor. Sie sehen eine Verformungsregel am Werk, die jede Linie erst nach innen, dann nach außen dehnt. Am Ende kommt auch hier eine Figur heraus, bei der alle Linien auswärts weisen. Gerade dieses funktionale Denken hilft Menschen, Rechenaufgaben besser zu lösen, so die These der Mathematikerin. Anstatt beispielsweise in Kardinalzahlen zu denken – 1, 2, 3, viele –, sollten Kinder von klein auf den Prozessaspekt lernen: Mit Hilfe der Ordinalzahlen, die aus der Abzählbarkeit entstehen (»der Erste«, »der Dritte«) und damit das prozesshafte »plus eins« in sich tragen.

Die zwei Denkweisen konnte Inge Schwank zusammen mit dem Lübecker Forscher Jan Born in einer EEG-Studie nachweisen. Im Gespräch mit **Gehirn&Geist** erklärt sie, wie das funktionale Denken früh gefördert werden könnte, warum besonders Mädchen davon profitieren, und warum gute Noten im Rechenunterricht nicht viel bedeuten müssen.

»Wenn man die Defizite erst in der dritten Klasse feststellt, ist es häufig zu spät«

Frau Professor Schwank, als ich es in der Schule mit dem Dualsystem zu tun bekam, also Zahlen nur binär mit Hilfe von 0 und 1 darstellen sollte, musste ich ziemlich knobeln. Hätte ich mich leichter getan, wenn ich als Junge geboren worden wäre?

Ich fürchte, ja. Es ist inzwischen anerkannt, dass sich Mädchen anders als Jungen mit Mathematik schwer tun. Aber die Frage lautet doch: Warum ist das so? Meine Untersuchungen zeigen, dass die Mädchen eher zum eigenschaftsbezogenen Denken neigen als zum funktionalen. Jungs hingegen knobeln mehr, jonglieren herum, gehen auf Zahlen-Entdeckungsreise. Geben Sie Grundschülern etwa die Aufgabe: Ein Gärtner soll eine Strecke von 30 Metern mit Bäumen bepflanzen, sodass alle zwei Meter ein Baum steht. Die Mädchen teilen jetzt einfach 30 durch 2 – und kommen zum falschen Ergebnis. Die Jungs stellen sich den Prozess vor: Der Gärtner pflanzt zum Beginn der Strecke einen Baum, dann noch einen, und so fort, und am Ende muss er dann noch einen 16. Baum pflanzen.

Was hätten meine Lehrer da tun können?

Gezielt das funktionale Denken fördern, anstatt die Hände in den Schoß zu legen und zu sagen: Mädchen sind halt nicht so gut in Mathe. Wenn man weiß, dass es unterschiedliche Denkweisen gibt, kann man ganz anders damit umgehen.

Was genau kann die Schule denn da tun?

Viele Experten sind sich einig, dass die Kinder beim Zahlenlernen schon den Konstruktionsprozess erfahren sollten: Zahlen können immer um eins mehr werden. Sie sollten es also nicht mit der Zahl Neun an sich zu tun bekommen, sondern immer auch mitdenken, dass vorher die Acht kommt und danach die Zehn. Die Kunst ist nun, zu verstehen, dass ich jede beliebige Zahl immer aus

Inge Schwank

- Jahrgang 1959
- 1977 – 1982 Studium der Mathematik, Physik und Informatik (Lehramt Gymnasien)
- 1984 Promotion in Mathematik, 1992 Habilitation (Mathematikdidaktik)
- seit 1986 wissenschaftliche Leiterin des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik in Osnabrück
- seit 2001 Professorin für Mathematikdidaktik (Kognitive Mathematik) an der Universität Osnabrück
- Arbeitsschwerpunkte: Repräsentation mathematischer Ideen im Gehirn, Innovationen im Mathematikunterricht

der Addition »plus eins« konstruieren kann. Selbstverständlich sollen sie sich beim Rechnen nicht nur mit Einerschritten begnügen. Aber es ist wichtig, dass die einzelnen Zahlen aus ihrer Isolation geholt und die rechnerischen Zusammenhänge zu anderen Zahlen deutlich werden.

Und wer das nicht lernt, hat auch Schwierigkeiten mit anderen Zahlensystemen?

Wenn Sie als Schülerin mit dem Dualsystem zu kämpfen hatten, dann heißt das nur, dass Sie wahrscheinlich auch das Zehnersystem noch nicht ganz verstanden hatten. Viele Kinder haben anfänglich Schwierigkeiten mit dem Zehnerübergang, etwa wenn man bei »8 plus 4« plötzlich über die Zehn hinwegspringen, also eigentlich rechnen muss: »8 plus 2 gleich 10, plus 2 gleich 12«. Und dann haben sie auch Probleme, wenn sie im Dualsystem plötzlich »11 plus 1 gleich 100« (übersetzt in unser System: »3 plus 1 gleich 4«) rechnen sollen.

Wie hängen denn diese Probleme mit der Idee des »plus eins« zusammen?

Sie müssen den Schülern ja begreiflich machen, was Zahlen sind – das ist fundamental. Es muss ihnen klar werden: Die Zahl ist nicht die Ziffer, die vor ihnen steht, sondern die Idee, die dahinter steckt. Dabei hilft eine Zahlendefinition, bei der von Null an über Weiterzählen alle anderen Zahlen konstruiert werden. Das wäre ein funktionaler Ansatz und gleichzeitig die Grundlage des Rechnens. Wenn sich die Kinder aber immer nur Mengen vorstellen, dann denken sie in Kardinalzahlen. Sie sehen auf dem Parkplatz fünf Autos und erkennen: »Das sind ja genauso viele, wie ich Finger an der Hand habe.« Sie sehen also die Gesamtheit und nicht den Konstruktionsprozess. Der Punkt ist: Sie können nicht wissen, was »fünf« ist, wenn sie nicht irgendwann einmal durchgezählt haben.

Was hat das mit den Schwierigkeiten beim Zehnerübergang zu tun?

Egal ob Dual- oder Zwölfersystem, das Prinzip ist das gleiche: immer eins mehr. Aber der Takt ist anders. Entwickelt ein Kind kein Gefühl für die Bedeutung des Schritts von der Neun zur Zehn im Dezimalsystem, wird ihm der Zehnerübergang suspekt und das Zählen in Systemen mit anderen Takten unverständlich bleiben.

Was passiert denn, wenn jemand nicht funktional denkt?

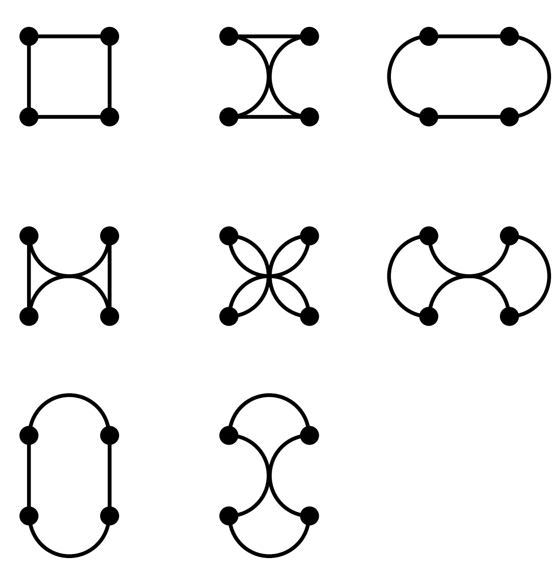
Nehmen Sie eine Drittklässlerin, die aufgefordert wird: »Bestimme den Nachfolger von Eintausendneunzig!« Ihre Antwort: »Zweitausend«. Stellen Sie sich nun Zahnräder vor, wie beim Tachometer. Um eine Zahl vorwärts zu zählen, müsste sie eigentlich das letzte, hintere Rädchen eins weiter drehen. Sie dreht aber am falschen Rädchen – ganz vorne! Sie macht etwas Richtiges, nur an der falschen Stelle, setzt den falschen Prozess in Gang und landet bei 2000. Sie lässt sich von der Neun zu der Annahme verführen, dass da jetzt ein größerer Schritt kommen müsste, eine Art Zehnerschritt – und macht den auch noch an der Tausenderstelle. Wenn sie ein funktionales Empfinden hätte, würde ihr dieser Fehler nicht passieren: Sie würde merken, wie verkehrt das Ergebnis ist. 2000 ist fast das Doppelte von 1090! Das kann doch nicht der Nachfolger sein.

Wie können Forscher nachweisen, dass manche Menschen beim Rechnen funktional denken?

Wir sind auf den Gedanken gekommen, uns um diese mentale motorische Fähigkeit zu kümmern …

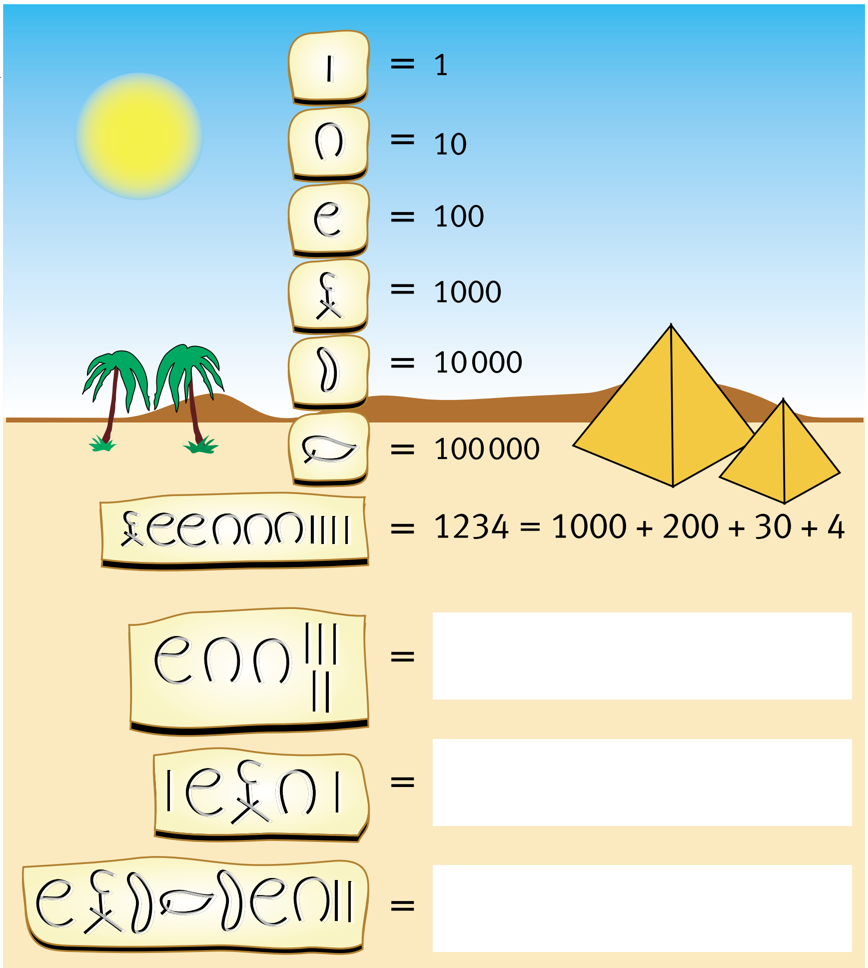
Sie meinen hier mit »motorisch« tatsächlich: dass wir im Geist etwas bewegen?

Ja. Nur wenige sind davon überzeugt, dass das mit Denken zu tun hat, aber ich halte es da mit dem niederländischen Mathematiker Bartel van der Waerden (1903 – 1996), der sagte: Wenn wir uns einen Kreis vorstellen, dann können wir das auf verschiedene Arten tun. Eine Möglichkeit ist, sich eine kreisförmig gezeichnete Linie vor Augen zu halten. Aber man kann sich auch vorstellen, wie ein Stab so rotiert, dass er einen Kreis erzeugt. Letzteres ist für uns »mentale Motorik«. Dabei ist wichtig, dass die motorischen Vorstellungen für Konstruktionsprozesse stehen. Denken Sie an das Baumpflanz-Beispiel: Da kann man sich vorstellen, wie jemand nach und nach Bäume in die Erde setzt – also das Vorher, die Aktion selbst und das Nachher mental bewältigen. ▷



GEHIRN&GEIST

Vergleichen oder Biegen?
Wer die Lücke rechts unten schließen will, entscheidet sich unbewusst für eine von zwei Denkstrategien. Die »prädikativen« Denker orientieren sich an Ähnlichkeiten. Die »funktionalen« sehen dagegen eine Verformungsregel am Werk: Durch Biegen entsteht aus dem Quadrat links oben Schritt für Schritt eine Art Kleeblatt, bei dem alle Seitenlinien nach außen weisen – hätten Sie's gewusst?



SIGANIM / GEHIRN&GEIST

Ägyptisches Kalkül

Auch die mathematischen Köpfe am Nil rechneten im Dezimalsystem. Aber sie schrieben ihre Zahlen ganz anders auf. Wenn Schulkinder damit jonglieren, machen sie sich spielerisch unser arabisch-indisches System klar. (Die Lösungen lauten übrigens: 125, 1112 und 121 212.)

Wie untersuchen Sie das bei den Kindern?

Wir hatten in der Grundschule zufällig mit Dynamischen Labyrinthen gearbeitet. Das sind hölzerne Steckbretter, auf denen man mit Bausteinen Wege bauen kann. Außerdem gibt es Kreuzungen und Weichen. Diese Knotenpunkte symbolisieren Rechenoperationen. Die Kinder konstruieren damit etwa eine Additionsmaschine, fahren dann den Weg ab und vollziehen so nach, ob sie die Rechenoperation richtig umgesetzt haben. Das ist ganz klar eine funktionale Aufgabe: Es geht um den Prozess. Wir schauten Kindern und Jugendlichen in Deutschland, Indonesien und China dabei zu und befragten sie, mit welcher Strategie sie vorgingen. Uns wurde klar: Sich etwas im Raum und außerdem – das ist das Relevante – in der Zeit vorzustellen, ist über die Kulturen hinweg für viele ein Problem. Heute arbeiten wir mit Musterergänzungsaufgaben, um das zu prüfen.

Sie warnen immer vor der Negativkarriere, die Kinder in Sachen Mathematik einschlagen, wenn schon in der Grundschule etwas schief gegangen ist.

Für manche Kinder ist die Welt des Rechnens so klar. Sie sehen Zahlen nicht isoliert für sich, sondern als Ergebnis eines Prozesses. Aber diese funktionalen Zusammenhänge braucht man in der Grundschule nicht notwendigerweise mitzudenken. Wenn ein Kind immer brav Hausaufgaben macht und dann auch noch ein gutes Gedächtnis hat – dann muss es gar nichts verstanden haben! Es bekommt gute Noten, ohne sich auf die Konstruktion der Zahlen einzulassen. Gerade in der ersten Klasse zählt man maximal bis 20. Da die Kinder zunächst nicht alle Zahlzeichen schreiben können, gibt es auch nur wenige Möglichkeiten für Rechenaufgaben.

Sprich – die Kinder ahmen einfach geschickt wenige einfache Muster nach, ohne etwas zu verstehen?

Schlimmstenfalls ja. Dass man Kinder dazu bringt, Sprüchlein aufzusagen: »zwei plus drei gleich fünf«, ist kein Problem. Dabei bemerkt der Lehrer aber nicht unbedingt, ob auch verstanden wurde, was dahinter steht. Und das Tragische daran ist: Wenn man die Defizite erst in der dritten Klasse feststellt, ist es häufig zu spät. Denn die Mathematik funktioniert so: Man überlegt sich etwas anhand kleiner, überschaubarer Größenverhältnisse. Dann überträgt man dies auf Rechenoperationen mit größeren Summen. Wenn ein Kind es jetzt aber verpasst hat, sich etwas bei kleinen Beträgen genau zu überlegen, dann gelingt ihm das später nur noch schwer – oder gar nicht mehr.

Ein hartes Urteil. Man kann sich mit 80 noch eine neue Sprache aneignen – aber was in Mathematik bis zur dritten Klasse nicht gelernt wurde, das wird nie gelernt?

Ich habe eben schon zu viele Kinder erlebt, bei denen das so passiert ist; auch im Gymnasium stoße ich auf die abenteuerlichsten Fehler. Das Problem ist: Was will die Schulmathematik erreichen? Der Höhepunkt in der Grundschule sind die schriftlichen Rechenverfahren. Das Ziel ist, dass diese automatisch funktionieren und man nicht mehr nachdenken muss. Die meisten Schulbücher gehen so vor: Eine Beispielaufgabe wird vorgerechnet, und dann machen die Kinder zehn Aufgaben nach diesem Schema. Dadurch wird das in ihren Köpfen vielleicht ruck, zuck automatisiert. Ob sie die Aufgabe aber auch wirklich verstanden haben – das kann keiner mehr nachvollziehen.

Wie können Lehrer das verhindern?

Sie können die Themen gemeinsam mit den Kindern diskutieren.

Rechnen als Diskussionsfach in der Grundschule?

Tatsächlich spricht es sich erst ganz langsam herum, dass dies die richtige Methode ist. Es gibt diesen wunderbaren Ansatz des Dialogischen Lernens. Hier stehen die Kinder untereinander und mit dem Lehrer im Dialog. Es werden Verhandlungen zu bestimmten Themen abgehalten; die Kinder schreiben oder malen in Lern-Reisetagebücher, in denen sie wichtige Überlegungen festhalten. Anstatt Aufgaben zu lösen, werden Aufträge bearbeitet. Sie lernen dabei, selbst zu denken, die Ergebnisse im Dialog mit den anderen einer Bewährung zu unterziehen und miteinander zu klären …

Ich versuche mir vorzustellen, wie ein Kind in der ersten Klasse wohl über Zahlen diskutiert … Hätten Sie ein Beispiel dafür?

Der Lehrer könnte die Kinder auffordern, ein Bild zu malen: zwei Gesichter, die sich anschauen. Dann zeichnen sie Sprechblasen vor jeden Mund; beide Gesichter sollen »hallo« sagen. Der Unterschied: Der linke Sprecher hat ein richtiges »hallo« in der Blase stehen. Bei dem anderen Gesicht wird das Wort spiegelverkehrt aufgeschrieben: »ollah«. Bei den Zahlen haben wir das auch. Wir können »13« schreiben oder »31«. Und darüber redet man dann gemeinsam: Was ist genau falsch daran, 31 statt 13 zu schreiben? Das können Sie mit Kindern wunderbar besprechen – mit Kindern besser als mit Erwachsenen. Denn dieses spiegelverkehrte »hallo« würde doch kaum einem Erwachsenen einfallen. Dabei hat es eine innere Logik: Beim linken Gesicht fängt das »hallo« mit dem h an seinem Mund an – und das ist bei dem anderen auch so! Wenn Sie so etwas diskutieren, dann sind die Kinder offen und begeistert. Genauso bespricht man mit ihnen, was das Zeichen »3« an der einen Stelle bedeutet und was an der anderen. Man erarbeitet in der Gruppe, was hinter dieser Konvention steht – die Kinder begreifen dann auch, dass es sich um eine Übereinkunft handelt, was Ziffern und Buchstaben bedeuten.

Aber wie erklärt ein Lehrer den Kindern, was eine Zahl bedeutet – sagt er ihnen: »Das ist eine Sechs, und da denkt ihr dann bitte immer gleich dazu, dass die durch ›2 mal 3‹ entstehen kann«? Wie erklärt man das, wie übt man das?

»Üben« und »erklären« sind Vokabeln, die das genannte Lernkonzept eher vermeidet. Es geht nicht um Übungen, die man vorgemacht bekommt und dann nachmacht. Und beim Erklären ist die Aktivität zu einseitig beim Lehrer. Was man hinbekommen muss, ist, dass das Kind zum Hauptakteur im Lernarrangement wird.

Wie sorgt ein Lehrer dafür, dass die Schüler diese Rolle auch gerne übernehmen?

Man kann etwas gemeinsam mit den Kindern in Frage stellen und dann gemeinsam mit ihnen eine Lösung finden. Schauen Sie sich das bei den Zahlzeichen an: Stellen Sie sich vor, Sie hätten aus einer Schaumstoffröhre eine schöne große Acht geformt und Ihrer Klasse hingehalten. Dann drehen Sie sie um und fragen: Was ist das jetzt? Dann machen Sie das Gleiche mit der Neun, oder mit der Zehn, bei der Sie die Ziffern vertauschen. Ich verspreche Ihnen: Ganz viele Kinder kommen und fangen an zu fragen: Was steckt denn hinter diesen Zahlzeichen? Bei den Größeren nutzt man andere Zeichensysteme. Das altägyptische eignet sich sehr gut als Grundlage für eine Diskussion, weil es auch eine Zehnerstruktur hat (siehe die Abbildung links). Nun schreiben Sie die Zahl 13: Das ist ein »Hufeisen« für die Zehn und drei Striche für die Einsen. Das heißt, für die Zehn nimmt man plötzlich ein ganz anderes Zeichen als in unserem System – und die Position ist egal: Man könnte das Hufeisen auch ans Ende stellen, die Bedeutung änderte sich trotzdem nicht.

Dann fangen die Kinder an nachzudenken.

Genau. Statt zu erklären, gibt man Denkanstöße. Aber schauen Sie sich unsere zweiten Klassen an. Immer noch heißt Rechenunterricht hier, das kleine Einmaleins vorwärts und rückwärts aufzusagen. Das ist wirklich stumpf. Man darf kleine Kinder doch nicht als Taschenrechner missbrauchen!

Aber lernen muss man es doch auch! Ich bin eigentlich ganz froh, 8 mal 8 nicht jedes Mal nachrechnen zu müssen, sondern das Ergebnis »64« gleich zu wissen.

Das ist ja auch sehr praktisch. Aber es reicht nicht. Man sollte auch erklären können, warum das so ist. Und das ist der eigentliche Kern des mathematischen Geschäfts. Sagen Sie mir doch einmal im Dualsystem, was 3 mal 4 ist?

Da müsste ich überlegen …

Ich behaupte, dass Dinge wie das Einmaleins so überautomatisiert sind, dass das Gefühl für die Prozesse dahinter verloren geht. Dann hat niemand mehr gerne damit zu tun. Dem sollten auch die Lehrer vorbeugen. ◀

Die Fragen stellte **Gehirn&Geist**-Redakteurin **Annette Lessmöllmann.**

Literaturtipp

Ruf, U., Gallin, P.: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik (2 Bände). Seetze: Kallmeyer, 1999.

Weblinks

Institut für Mathematikdidaktik:
www.fmd.uni-osnabrueck.de

Tipps für den Unterricht – wie funktioniert ein Dynamisches Labyrinth:
www.ikm.uos.de/aktivitaeten/dl/dynamische-labyrinthe.htm